Einführung in die Funktionsanalysis

Inhaltsverzeichnis

FRAKTALES LERNEN

Lernen ist Teamarbeit

Auch wenn viele sich dessen nicht bewusst sind: Wir sind immer beides: **Mensch und Tier.**

Menschen lernen durch: Details, Lehrer, lesen, Reihenfolge, Schluss von A auf B.

Tiere müssen Ähnlichkeiten ahnen, Unterschiede und Zusammenhänge seh'n.
Ihre Lehrer sind die 7 Sinne und Erfahrung.
Sie glauben nur, was sie immer wieder sehen.

Diese Buchreihe führt euch beide in den Bereich der Funktionen ein.

Auf der linken Seite darf der **Mensch** in dir lesen.

Auf der rechten Seite darf das **Tier** sehen.

Lass deine Augen hüpfen

In einem Buch hat –normalerweise– alles eine Reihenfolge und wir lesen von vorne nach hinten. In diesem Buch darfst du auch dann weiterblättern, wenn du nicht verstanden hast. Hier darfst du Adler-Kreise zieh'n. Lass dich treiben, und eh' du dich versiehst, wird das Buch zum Daumenkino und musst du gar nicht mehr lesen, sondern darfst …

- blättern
- sehen
- dich erinnern.

PS: Die rote Linie in dem Bild auf der rechten Seite zeigt, wie Augen über ein Bild hüpfen, um es zu verstehen. Genau das darfst du in diesem ganzen Buch tun.

FRAKTALES LERNEN

Die Geschichte einer Hotel-Geraden

FRAKTALES LERNEN

Unendlich viele Zimmer und trotzdem keines frei?

Ein Mann kommt in eine Stadt und sucht ein Zimmer. Da fährt er an einem Hotel vorbei, über dem in großen Lettern steht: ***Hilperts Hotel: Unendlich Viele Zimmer***. „Hier werde ich sicher fündig" sagt er sich:

Er fragt den Portier, ob ein Zimmer frei wäre. Doch dieser antwortet:

„Nein mein Herr, wir sind ausgebucht."

„Wie kann das sein? Sie werben mit unendlich vielen Zimmern?"

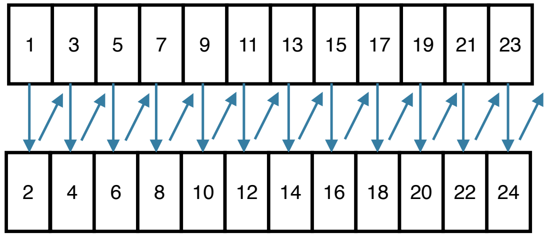
„Wenn sie mich fragen, ob ein Zimmer frei *ist*, muss ich verneinen. Denn wir haben unendlich viele Gäste. Doch ich will nicht spitzfindig sein und werde ihnen trotzdem ein Zimmer frei machen. Denn das kann ich!"

Er nimmt das Telefon und macht eine Durchsage:

„Alle Gäste bitte mal rauskommen. Jeder blickt sich zur Sicherheit einmal um, überprüft seine Zimmernummer, zählt „1" dazu und geht in dieses Zimmer!"

Dann wendet er sich wieder dem Gast zu:

„Mein Herr: Zimmer Nummer 1 ist frei. Ich wünsche einen angenehmen Aufenthalt."



FRAKTALES LERNEN

Etwas später trifft ein Bus ein. An Bord, wir wundern uns kaum noch: Unendlich viele Gäste. Auch jetzt findet der Portier eine Lösung:

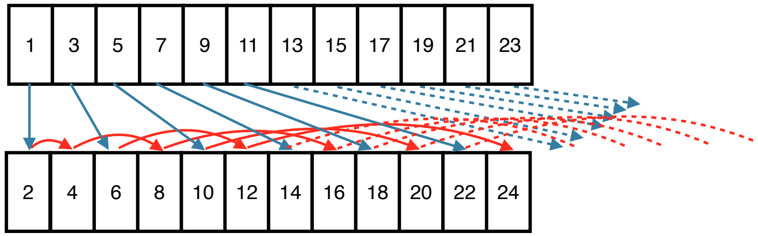
„Alle bitte mal rauskommen. Jeder *multipliziert* seine Zimmernummer mit „2“ und geht dorthin.“
„Bitte sehr, meine Damen und Herren: Alle Zimmer mit ungerader Nummer stehen zu ihrer Verfügung.

***Das* sind Funktionen:**

***Ein mehr oder weniger komplexer* Befehl ergeht gleichzeitig an „unendlich viele Gäste“.**

Unendlich viele Rechnungen sind die Folge

mit unendlich vielen Ergebnissen.



FRAKTALES LERNEN

Ein Strich, sie alle zu binden!

Nie sind alle Gäste im Haus.

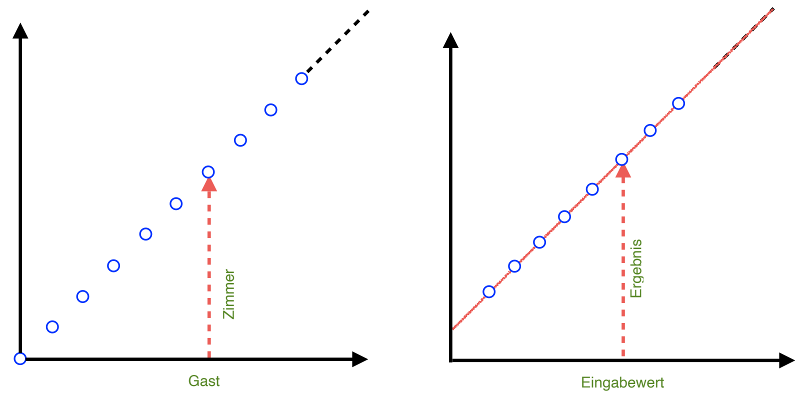
- Unser Portier könnte jeden Gast persönlich über aller Veränderungen in deren Abwesenheit informieren. Doch damit wüssten nur die Gäste bescheid, ihm selbst fehlte der Überblick.
- Auch eine Liste mit allen Zimmerwechseln, würde nur den Gästen helfen, nicht ihm selbst.
- Wollte er eine Tabelle anfertigen, unendlich lange wäre er beschäftigt.
- Also macht er das, was die Mathematiker tun, wenn sie verstehen wollen: Er malt einen Strich: Der vertikale Abstand eines jeden Punktes von der Gastachse steht für das Zimmer (y) in dem der Gast (x) gerade wohnt.

In der Mathematik geht es nicht um (ganze) Zimmer, sondern um Zahlen. Alle Zahlen. Alleine zwischen „0“ und „1“ unendlich viele. Denn wir wollen auch Veränderung beschreiben[1] und Zeit besteht nunmal aus klitzekleinen Augenblicken. Auf wundersame Weise fügen sich unendlich viele Einzelpunkte zu einer glatten Linie.

Jetzt verstehen auch die *Augen*, und nicht nur der Verstand.

---

1 Vielleicht wollen wir ja die Höhe eines Balles, den wir aus dem Fenster werfen, zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnen.
Auch seine Geschwindigkeit ändert sich ständig. Ebenso seine Richtung.
Oder den Ort eines Planeten, seine Geschwindigkeit, seine Richtung, seine Beschleunigung. etc. Kräfte beobachten. Einfach alles, was sich in der Zeit verändert, hat unendlich viele Zimmer.



Unser Portier will –solang' es geht– gerade Linien zieh'n

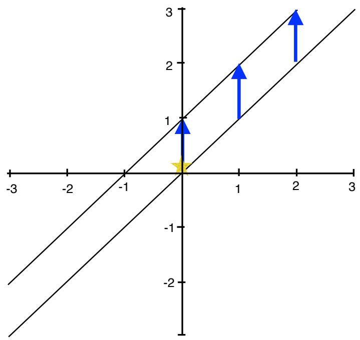
Jede Funktion fängt mit *der* Geraden an, die ausdrückt: „Es wurde noch nicht gerechnet. Jeder Gast befindet sich in *dem* Zimmer, das seinen Namen trägt." Und damit der Portier auch weiterhin Geraden zeichnen kann, verwendet er solange irgend möglich ausschließlich Rechenoperationen, bei denen er nur seine letzte Gerade ändern muss:

$$y = x + 1$$
$$y = 2x$$

Aufgabe 1: Versuche, mit Worten zu beschreiben, was jeweils mit der Start-Geraden passiert!

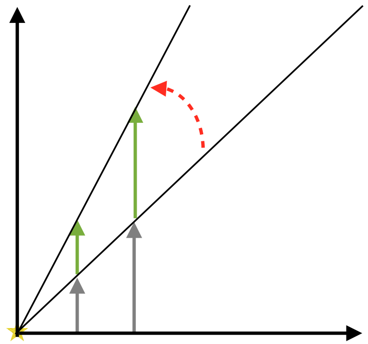
Welcher Gast darf in seinem Zimmer bleiben?

Aufgabe 2: Wer wohnt in Zimmer „0", ★, wenn alle Gäste ein Zimmer weiter wandern? Im Umgang mit Funktionen ist es äußerst hilfreich, wenn wir ausschließlich in Zimmern denken. Ändern wir also unsere Perspektive und fragen: Wohin auf unserem Plan ist das Zimmer „0" gewandert, wenn wir 1 addieren? Nach links, oder nach rechts?



$$y = x + 1$$

$$y = 2x$$



FRAKTALES LERNEN

„Malen nach Zahlen“

Wer schon einmal mit seinem Mathelehrer im Skilager war, kennt vielleicht folgenden Satz:

„Die kürzeste Verbindung zwischen Start und Ziel ist die Gerade. Wir fahren Schuss.“

Was der Lehrer zum Ausdruck bringen will: Kennen wir nur 2 Punkte einer Geraden, kennen wir auch alle anderen. Behält unser Portier nur 2 Gäste im Auge, weiß er trotzdem genau, in welchen Zimmern sich alle Gäste gerade befinden. Die unser Portier ist Mathematiker. Er rechnet nur, wenn es gar nicht anders geht:

$$y = +1 + 2x$$

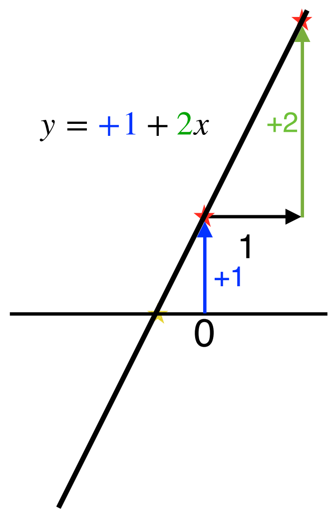
Für Gast Nr. „0“ reduziert sich die Gleichung auf: $y = +1$.

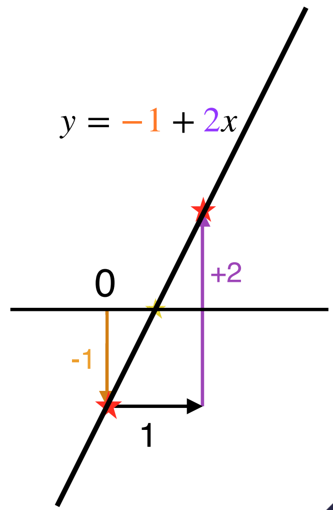
Im Ursprung gehen wir „+1“ nach oben . Erster Punkt ★

Für Gast Nr. „1“ lautet die Rechnung $y = +1 \ +2$.

Er nimmt die Abkürzung und geht sofort 1 nach rechts.

Für „Gast Nr. „1“ muss er jetzt nur noch $+2$ laufen. Zweiter Punkt ★





FRAKTALES LERNEN

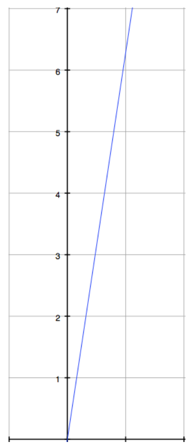
Nicht nur Portiers brauchen Überblick

Solange es uns um einen ganz speziellen Wert geht, gebrauchen wir Gleichungen als Formel. Wir setzen einen Wert ein, und erhalten den anderen. In der Geometrie ist das der Normalfall.

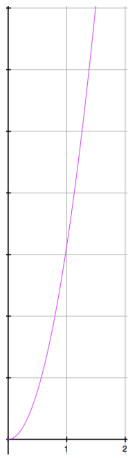
Doch manchmal geht es nicht um irgend einen besonderen Wert: Wir wollen verstehen, was hier gerade passiert: Wir suchen weder x noch y, sondern Eigenschaften der Linie, die alle Ergebnisse repräsentiert: zum Beispiel das größte Ergebnis, das kleinste, das schnellste oder langsamste.
Wenn es aber um Eigenschaften geht, dann helfen uns einzelne Ergebnisse nicht weiter. Auch keine Tabellen. Wir müssen wir alle Werte kennen. Gleichzeitig! Selbst wenn wir alle Werte innerhalb machbarer Zeit lesen könnten, hilft uns das nicht weiter. Denn wir müssen alle Ergebnisse mit allen anderen vergleichen. Und das können nur unsere Augen. Und genau jetzt wird aus der Gleichung eine Funktion:

- Die Funktion, die den Radius und Umfang in Beziehung setzt, ist eine Gerade.
- Die Funktion, die uns den Zusammenhang von Radius und Fläche zeigt, ist eine Parabel.
  (Beide sind nicht besonders spannend.)
- Je komplexer sich Zusammenhänge gestalten, desto schöner werden die Ergebnislinien und desto wichtiger wird Funktionsanalysis. Hier siehst du, wie ein Glockenturm schwingt, wenn eine kleine Glocke ihn immer wieder anschubst. Wann wird er einstürzen?

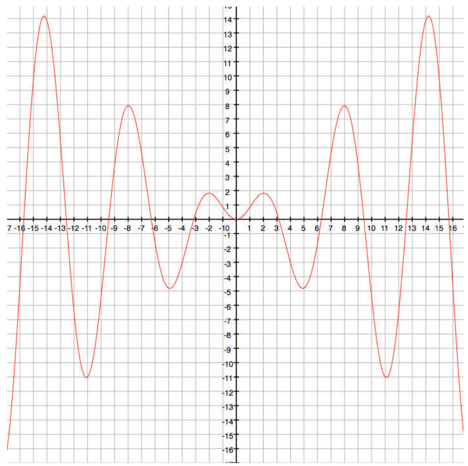
$u = 2r\pi$



$A = r^2\pi$



$y = x * sinx$



Wenige Punkte rechnen – alles wissen

Wir müssen also zeichnen. Toll! Um das zu tun, müssen wir doch rechnen, oder? Denn dede dieser Linien setzt sich zusammen aus unendlich vielen „Ergebnispunkten“. Unendlich viele Rechnungen würden sogar einen Computer unendlich viel Zeit kosten.

Richtig! Und genau hier kommt Funktionsanalysis in Spiel: Denn…

Die Funktions-Analysis ist die Kunst,
an wenigen Ergebnispunkten die ganze Geschichte abzulesen.

Aufgabe: Versucht einmal eine Linie durch die nebenstehenden Punkte zu ziehen[2]. Die Regeln:

- Die Linie läuft immer von links nach rechts, niemals rückwärts. (Unendlich viele Gäste in ein und demselben Zimmer sind in Holpert Hotel kein Problem. Doch wie im richtigen Leben kann kein Gast in mehreren Zimmern gleichzeitig wohnen). Stell dir vor, dein Stift würde sich wie bei einem EKS oder Seismograph nur nach oben oder unten bewegen, während das Blatt unter ihm von rechts nach links durch läuft.
- In ★ und ★ soll die Kurve einen „Berggipfel“ bzw. eine „Talsohle“ besitzen.

[2] Die Lösung brauchst du eigentlich nicht. Du findest die Lösung am Ende dieses Bandes.

Vorsicht Falle

Sowohl in Geometrie also auch in Funktions-Analysis verwenden wir das Koordinatensystem. Doch sein Sinn könnte in beiden Bereichen unterschiedlicher nicht sein:

In der **Geometrie** sind x und y (und z) senkrecht aufeinander stehende Richtungen. Sie vermessen den Raum und geben jedem Punkt darin einen Namen:

x: wie weit in x-Richtung

y: wie weit in y-Richtung

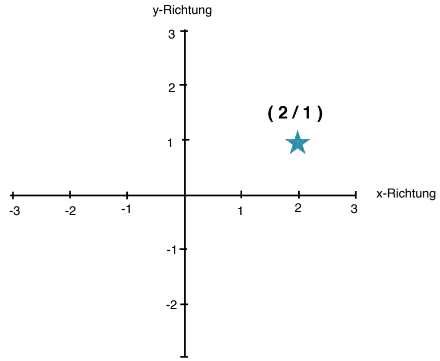
Die Punkt (alle Punkte) „existieren“ bereits, *bevor* wir Achsen zeichnen.

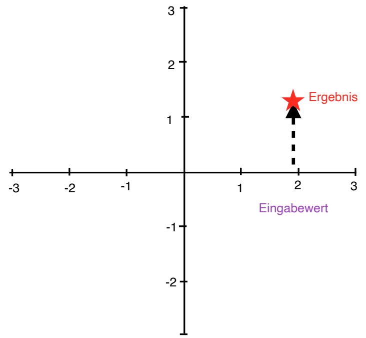
In der **Funktions-Analysis** stellt jeder gemalte Punkt ein Ergebnis dar. Er trägt zweierlei Information:

x —> Welcher Wert wurde in die Funktion eingesetzt

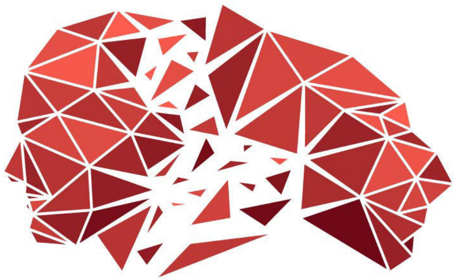
Das Ergebnis. —> y

Fast könnte man sagen: Diese Punkte entstehen erst beim Rechnen.





FRAKTALES LERNEN



Die drei wichtigsten Funktions-Familien

Wir wollten Dreiecke rechnen – jetzt schwingt es!?

Manche Zusammenhänge müssen wir messen

Ein Pfeil der Länge 1 dreht sich im Kreis. An jeder der unendlich vielen möglichen Positionen halten wir an und messen:

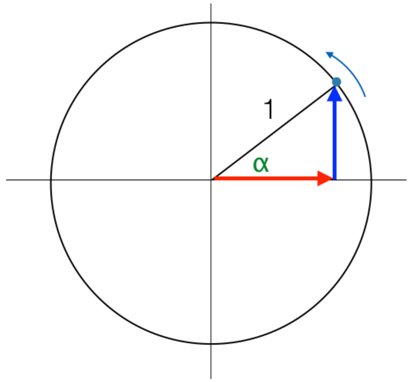
a) Welchen Winkel bildet unser Pfeil mit der Horizontalen

b) Wie weit liegt der die Spitze Punkt oberhalb oder unterhalb der x-Achse .

c) Wie weit liegt er links oder rechts der y-Achse.

Alle Messergebnisse tragen wir in eine Tabelle ein.[3] Jetzt kennen wir (in Dreiecken mit der Hypothenuse 1) zu jedem Winkel die Länge der Katheten; und umgekehrt.

[3] Genau das Gleiche gilt im Grunde für fast alle Funktionen. Eine Funktion ist also nicht etwas, was einer Zahl hinzugefügt wird, sondern die Funktion nimmt eine Zahl, sieht in der entsprechenden Zeile nach und gibt aus, was es in der anderen Spalte findet. Deshalb heißt es auch: Sinus (von) , Wurzel (von), Logarithmus (von).



Grad	Vertikal	Horizontal
10°	0,174	0,985
11°	0,191	0,982
12°	0,208	0,978
13°	0,225	0,974
14°	0,242	0,970
15°	0,259	0,966
16°	0,276	0,961
17°	0,292	0,955
18°	9,309	0,951
19°	0,326	0,946
20°	0,342	0,940
21°	0,358	0,936
22°	0,375	0,927
23°	0,391	0,921
24°	0,407	0,914
25°	0,423	0,906
26°	0,439	0,899
27°	0,454	0,891
28°	0,470	0,883
29°	0,485	0,974

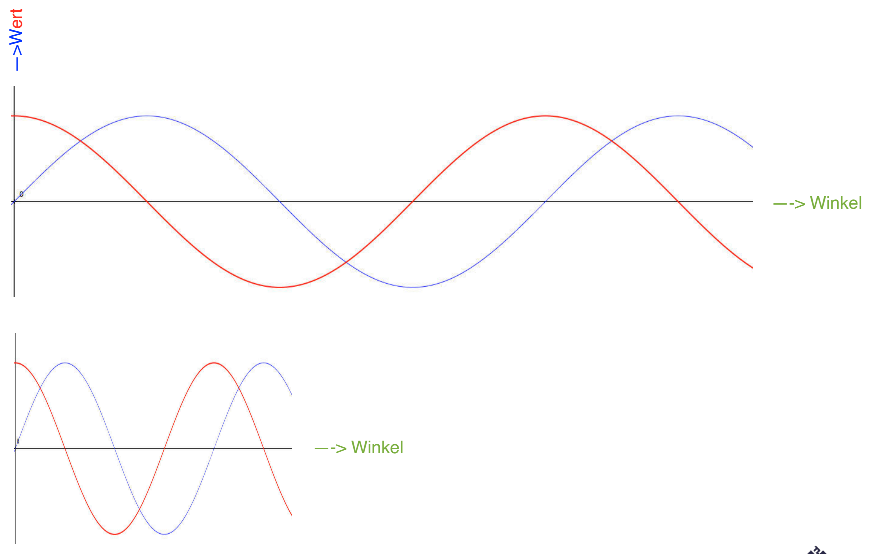
Jeder sieht die Welle anders

Wir können die Messergebnisse als Funktionsergebnisse interpretieren:

- Jedem Winkel.
- Ordnen wir den entsprechenden Wert aus der blauen Spalte zu.

Malen wir alle Ergebnisse in ein einziges Bild, entsteht eine Linie. Genauer gesagt: eine Welle. Geometrie (von Menschen erfunden um Dreiecke zu berechnen) und Natur finden überraschend zusammen.

Der **Ko-sinus** ist schlicht der Ko-mpagnon des Sinus.



FRAKTALES LERNEN

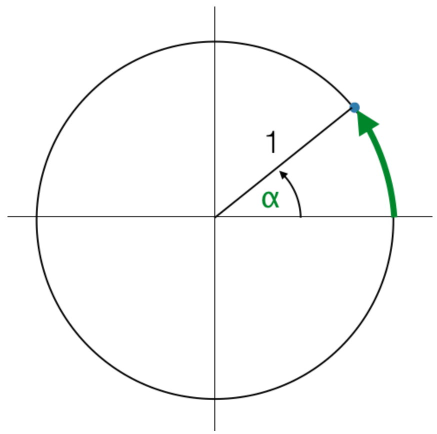
Gibt es einen Weg, Winkel in Länge zu messen

Mathematiker wollen jede Kurve immer auch beschreiben. Die Steigung in jedem Punkt spielt dabei eine wichtige Rolle. Da stört es, wenn jeder sie anders malen kann, nur weil beide Achsen unterschiedliche Einheiten tragen. Denn ohne Eichung der beiden Achsen gibt es keine mathematisch definierte Steigung.
Glücklicherweise gibt es einen Weg, den Winkel in Länge zu messen:

$$360° = 2\pi$$

Die Bogenlänge jedes Winkels erhalten wir über die Dreisatz:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{Bogen}{2\pi}$$

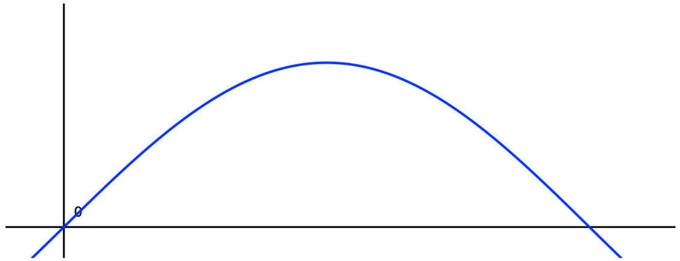


FRAKTALES LERNEN

Wer gab dem Sinus seinen Namen?

Die Hälfte der blauen Welle gab der ganzen ihren Namen. Denn sie ähnelt einer weiblichen Brust.

Sinus (lat.): Brust, Bogen Bausch:



Wert oder Eigenschaft?

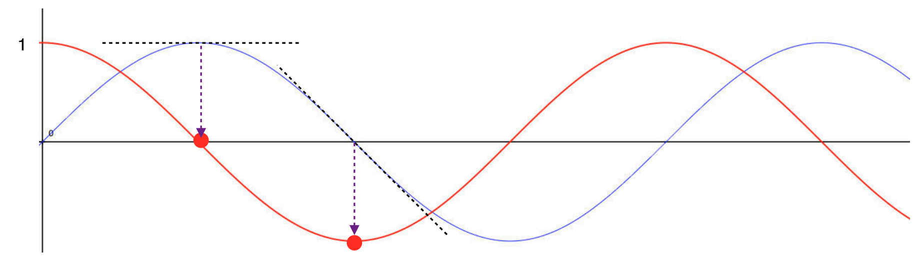
Wir haben also die Achsen geeicht und der Sinus und Kosinus haben eine fest definierte Form.
Sieh jetzt genau hin. Kannst du erkennen, …

dass die rote Welle dort den Wert „0" hat, wo die blaue Welle die *Steigung* „0" besitzt?

dass sie den Wert „1" hat, wo die andere die Steigung „1" besitzt?

Gleiches gilt für jeden anderen Winkel?

Und es kommt noch besser: umgekehrt geilt (abgesehen vom Vorzeichen) dasselbe.



FRAKTALES LERNEN

Sinus und Kosinus sind also auf dreierlei Weise verwandt:

a) Über den Pythagoras:

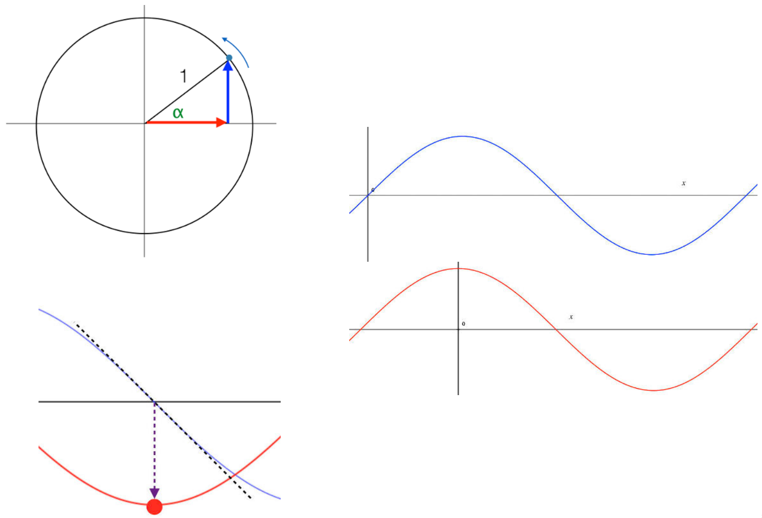
$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$

b) Beide sind im Grunde ein und dieselbe Welle, nur um 90 ° verschoben.

$$sin\ (90°) = cos\ (0°)$$

c) Der eine ist des anderen Eigenschaft.

cos = Steigung des sin



FRAKTALES LERNEN

Selber wachsen oder wachsen lassen?

Lineares und exponentielles Wachstum im Überblick

Zu einem Anfangswert immer dasselbe <u>addieren</u> heißt multiplizieren: Die dazugehörige Gleichung sieht so aus:

$$a + b * x = y \qquad (4)$$

a = Anfangswert

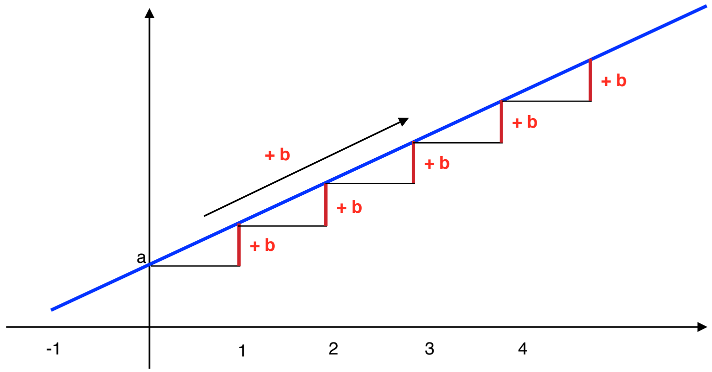
b = was mit jedem ganzen Schritt bassiert?

x = wie oft

y = Ergebnis

Da alle Ergebnispunkte dieser Art Wachstums auf einer geraden Linie liegen, nennen wir dieses Wachstum: „Linear".

[4] Statt **y = a + bx** könnten wir also auch schreiben: **y = ax + b.** Doch jetzt stünde der Anfangswert am Ende und hieße nicht mehr a sondern b. Zweimal würden wir sinnliche Zusammenhänge kaputt machen.



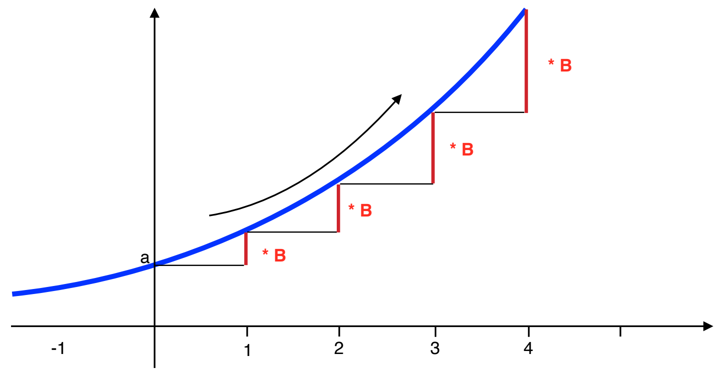
FRAKTALES LERNEN

Wenn wir nicht addieren, sondern immer wieder mit demselben Wert multiplizieren, sieht die Gleichung sehr ähnlich aus:

$$a * B^x = y$$

a = Anfangswert
B = was mit jedem ganzen Schritt bassiert?
x = wie oft
y = Ergebnis

Die Angabe „wie oft" wir multiplizieren, finden wir im Exponenten: Daher der Name: Exponentielles Wachstum. Dieses Wachstum mag noch so unscheinbar beginnen, irgendwann ist es schneller, als jede andere Funktion.



FRAKTALES LERNEN

Wachstum ohne Schalterstunden

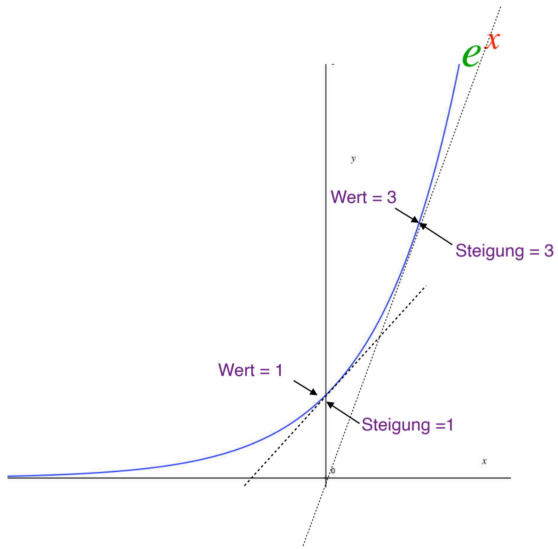
Im vorigen Kapitel hast du gesehen, dass der Sinus den Kosinus beschreibt und umgekehrt. Für exponentiales Wachstum gibt es etwas noch perfekteres. Setzen wir hierzu zuerst den Anfangswert auf „1“:

$$y = B^x$$

Für eine der berühmtesten Zahlen beschreibt diese Funktion sich selbst. Wert und Steigung sind identisch:

$$y = e^x$$ [5])

[5] Die Zahl e wird nach ihrem Entdecker bekannt: dem Mathematiker Leonhard **E**uler. Er stellte fest, dass der Zinsertrag größer wird, wenn wir ihn nicht erst am Ende des Jahres, sondern öfter eintreiben. Er wollte wissen, was der maximale Ertrag bei 100% Zinsen (=Verdoppelung) ist, wenn wir nicht monatlich oder täglich, sondern jeden Augenblick die Zinsen fordern. Heraus kam die Zahl $e = 2{,}71828.....$ (e hat ebensoviele Nachkommastellen wie π : unendlich viele.)
Wenn aber einer beim Wachsen keine Schalterstunden hat, dann die Natur. Deshalb heißt Wachstum mit der Basis e auch natürliches Wachstum.



FRAKTALES LERNEN

Gib mir Punkte: ich verbind' sie dir

Viele Dinge können wir mit Funktionen anfangen:

- Wir können Vorgänge und Prozesse in ihrer Ganzheit mit unseren Augen verstehen.
- Wir können Vorgänge qualitativ untersuchen.
- Sie helfen uns, krumme Flächen und variierende Prozesse zu berechnen.
- Wir können Vorhersagen machen und überprüfen, ob wir richtig liegen. Schon in der Planungsphase wissen wir, ob eine Brücke auch einem Sturm standhalten kann.
- Und noch eines können wir mit ihrer Hilfe tun: wir können einzelne Messpunkte zu Linien verbinden. Erst jetzt erzählen sie eine Geschichte, die wir mit dem Computer untersuchen können. Hierzu benutzen wir sogenannte Polynome[6]. Auf der rechten Seiten siehst du so ein Polynom (5ten Grades).

[6] Poly = viel, nomen = name; vergleiche einmal den Grad (das ist der höchste Exponent und die Anzahl der Parameter a, b, c…

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex^1 + fx^0$$

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

Modellierung der Sinusfunktion durch Polynome

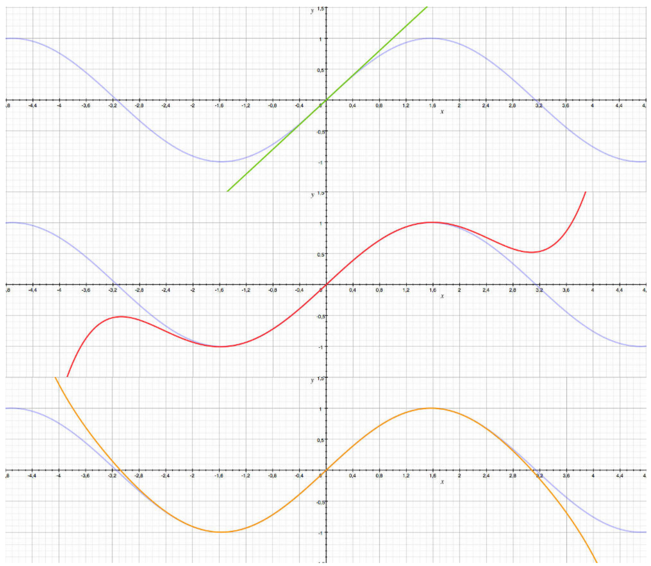
Um zu demonstrieren, wie machtvoll die Polynomfunktionen sind, will ich einmal die Sinuskurve „nachbauen“.

Zuerst durch eine grüne Gerade: $y = x$

Die rote Kurve fügt zwei Terme hinzu hinzu. $y = x - \frac{1}{6} * x^3 + \frac{1}{120} * x^5$

Die orange Kurve enthält 4 Terme: $y = x - \frac{1}{6} * x^3 + \frac{1}{120} * x^5 - \frac{1}{5040} * x^7$

Um einen gewissen Punkt herum können wir diese „Imitation“ zur Perfektion treiben. Aber das ist vielleicht eine Herausforderung für Studenten der Mathematik. In der Schule muss sich damit niemand beschäftigen.



FRAKTALES LERNEN

Modellierung eines Flusslaufes

Im nebenstehenden Bild ist ein Flusslauf abgebildet. Legen wir über das Bild ein Raster, können wir einige Punkte und Eigenschaften auslesen:

Punkte, die auf den Gitterlinien liegen:

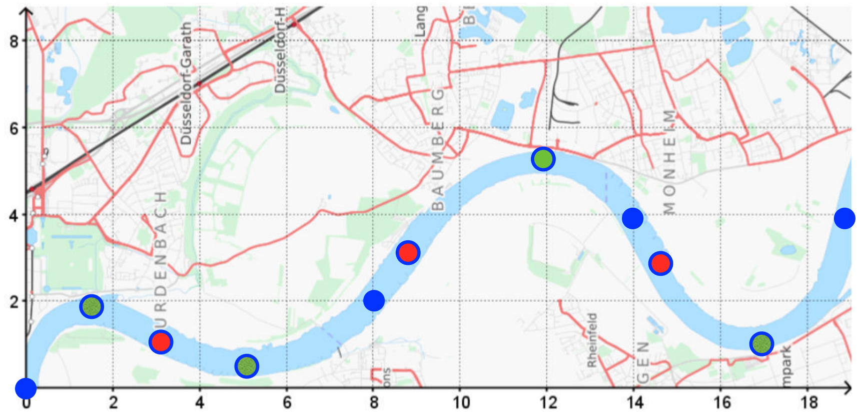
0 / 0	8 / 2	14 / 4	19 / 4

Punkte, die auch ein Extremum sind (Steigung = 0)

1,7 / 1,8	5 / 0,6	12 / 5,3	17 / 1

Punkte, die auch ein Wendepunkt sind:

3 / 1	9 / 3	14,5 / 3



Diesen Punkten entsprechen 11 Punktgleichungen, 4 Steigungsgleichungen und 3 Wendepunktsgleichungen. Da wir eine Kurve mit 4 Extrema suchen, brauchen wir ein Polynom mindestens 5ten Grades. (Das müsst ihr mir jetzt einfach mal glauben, sondern muss ich zu viel erklären und wir verstricken uns viel zu früh in Details.)
Sie dir das Polynom 5ten Grades noch einmal genau an: Wieviele Parameter zählst du:

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

Genau soviel Gleichungen brauchen wir. Von den 18 Punkten können wir uns also die einfachsten und vielversprechendsten aussuchen.

Auf der rechten Seite kannst du einige der zu den Punkten gehörenden Gleichungen sehen. Findest du heraus, welcher der oben genannten Punkte für die jeweilige Gleichung verwendet wurde? Sieh' dir hierzu noch einmal die Koordinaten der Punkte an.

$$0 = a * 0^5 + b * 0^4 + c * 0^3 + d * 0^2 + e * 0^1 + f$$
$$2 = a * 8^5 + b * 8^4 + c * 8^3 + d * 8^2 + e * 8^1 + f$$
$$4 = a * 14^5 + b * 14^4 + c * 14^3 + d * 14^2 + e * 14^1 + f$$

$$1{,}8 = 5a * 1{,}7^4 + 4b * 1{,}7^3 + 3c * 1{,}7^2 + 2d * 1{,}7^1 + e$$
$$0{,}6 = 5a * 5^4 + 4b * 5^3 + 3c * 5^2 + 2d * 5^1 + e$$
$$5{,}3 = 5a * 12^4 + 4b * 12^3 + 3c * 12^2 + 2d * 12^1 + e$$

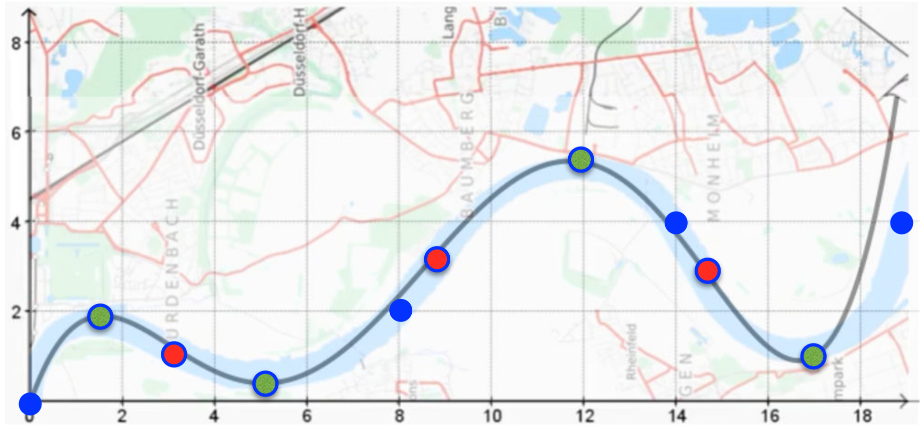
$$1 = 20a * 3^3 + 12b * 3^2 + 6c * 3^1 + 2d$$
$$3 = 20a * 9^3 + 12b * 9^2 + 6c * 9^1 + 2d$$
$$3 = 20a * 14{,}5^3 + 12b * 14{,}5^2 + 6c * 14{,}5^1 + 2d$$

Die Lösung

Die Flussaufgabe wurde einmal einem Leistungskurs Mathematik gestellt. Die Schüler sollten die 6 Gleichungen aufstellen. Aus diesen dan die 6 Parameter zu berechnen, ist dann eher etwas für einen Computer. Doch damit du siehst, dass es tatsächlich funktioniert, hier die Werte, die den Fluss mathematisch nachzeichnen:

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$\begin{aligned} a &= 0{,}000373 \\ b &= -0{,}01633 \\ c &= 0{,}243233 \\ d &= -1{,}416421 \\ e &= 2{,}889144 \\ f &= 0{,}0000 \end{aligned}$$



Das Polnom 2ten Grades

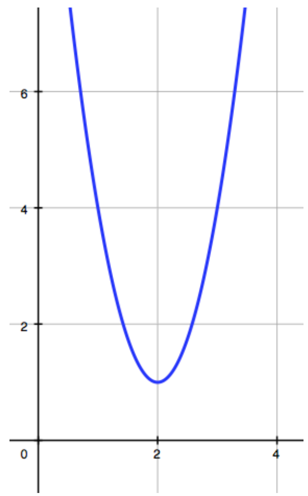
Alle Vorgänge, die mit Beschleunigung und Bremsen zu tun haben, lassen sich durch eine Polynom 2ten Grades darstellen[7]: Flugbahnen, Bewegungen unter Einfluss der Schwerkraft, …:

$$y = 3x^2 - 12x + 13$$

Für kaum eine andere Funktion haben die Mathematiker so viele Formeln entwickelt, wie für sie. Von allen Polynomen hat sie alleine einen eigenen Namen bekommen: die Parabel. Und sicher weiß du es schon:

Formeln machen uns das Leben leicht.

[7] Poly = viele (einzelne Funktionen, die addiert werden)



FRAKTALES LERNEN

Funktionen helfen deinen Augen, zu verstehen

FRAKTALES LERNEN

In „**Geschichte einer Hotelgeraden**“ ging es darum *was* Funktionen sindt:

Im zweiten Teil habe ich dir die drei großen Familien vorgestellt:

- Schwingungen
- Wachstum
- Potenzfunktion / Polynome

Die hast (hoffentlich) gesehen, dass jede Art von Funktionen ihren eigenen Zauber in sich trägt.

In diesem Band gehen wir noch etwas mehr ins Details. Es soll darum gehen, was wir mit im Grunde allen Funktionen tun können. Präge dir die hervorgehobenen Punkte ein; Sie werden wir helfen, Funktionen zu skizzieren, ohne sie zu rechnen.

Sanft schließt man Toten die Augen;
sanft muss man auch den Lebenden die Augen öffnen.

Jean Cocteau

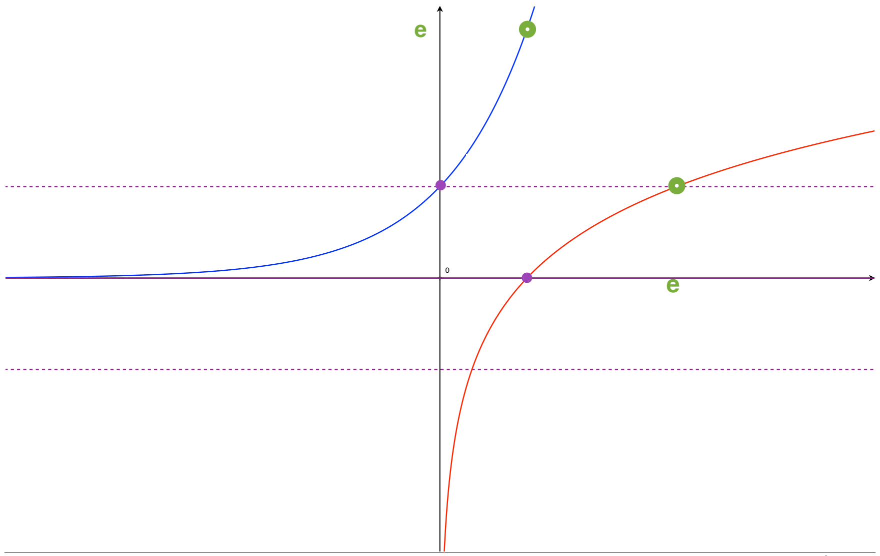
<u>Wo</u> sind die <u>Werte</u> der Funktionen „0“ und „1“?

Die hervorgehobenen Punkte haben besondere y-Werte. Lass sich also nicht davon ablenken, dass in vielen Fällen ausgerechnet Gast 1 sich immer im Zimmer 1 befindet. Noch einmal: Es geht immer nur um Zimmer: aus welchem Zimmer kommt ein Gast und in welches Zimmer geht dann. Die dünnen gepunkteten lila Linien bei y = 0, y = 1, y = -1 erinnert sich daran.

$$y = e^x$$

$$y = lnx$$

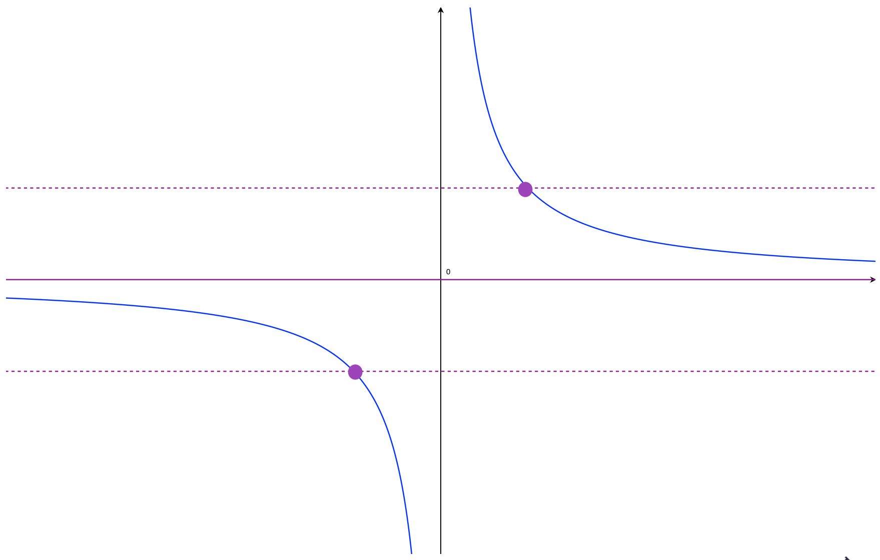
Kannst du sehen, wie die beiden Funktionen (optisch betrachtet) zusammenhängen?



FRAKTALES LERNEN

$$y = \frac{1}{x}$$

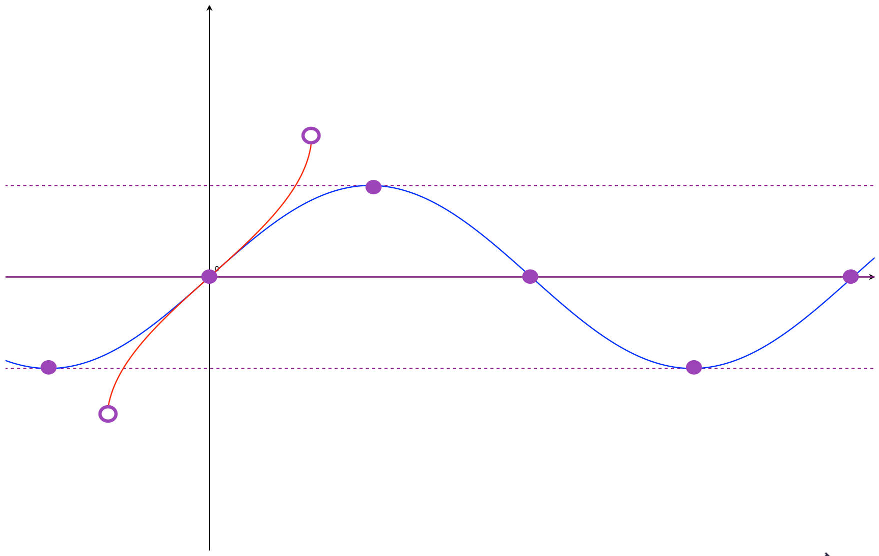
Warum ist diesmal nur eine einzige Funktion abgebildet?



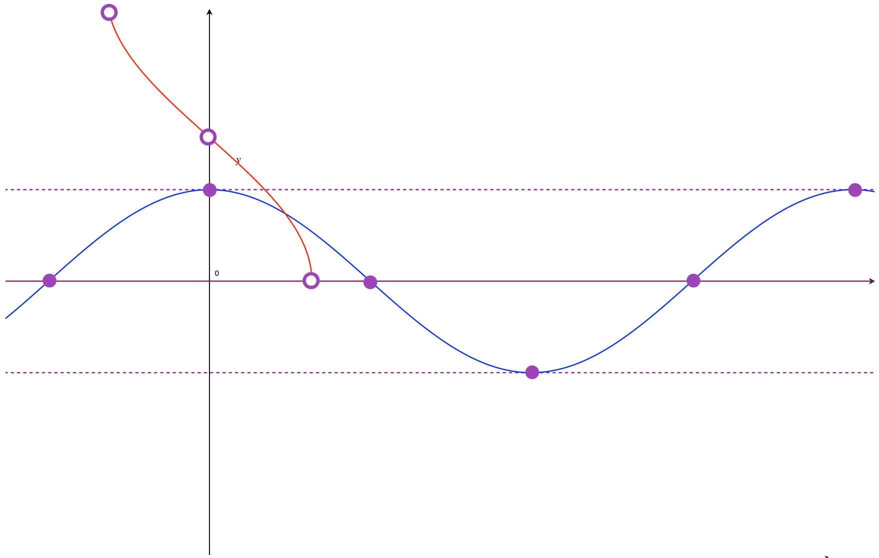
FRAKTALES LERNEN

$$y = \quad sin(x)$$
$$y = arcsin(x)$$

Kannst du erraten, warum der arcsin(x) abgeschnitten ist? Vielleicht denkst du einmal an Hilperts Hotel.

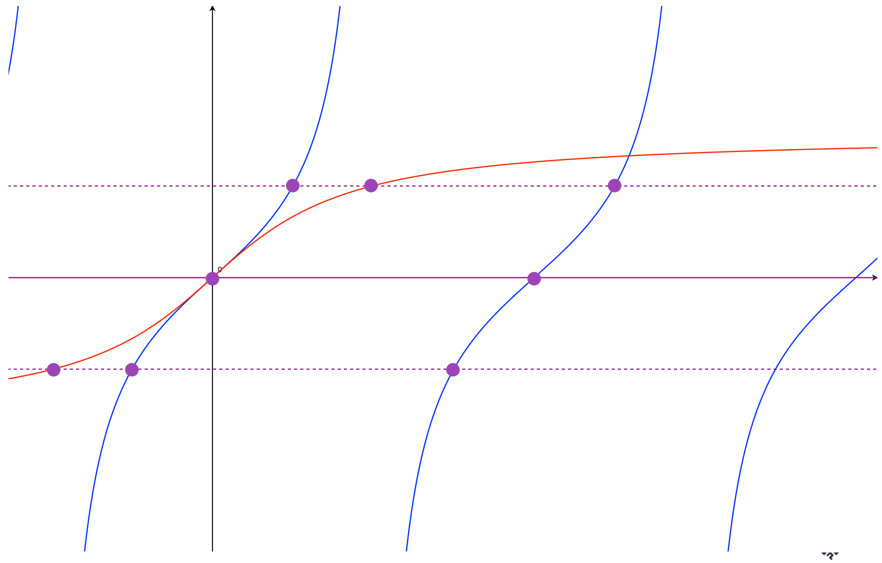


$$y = \quad cos(x)$$
$$y = arccos(x)$$



$$y = \quad tan(x)$$

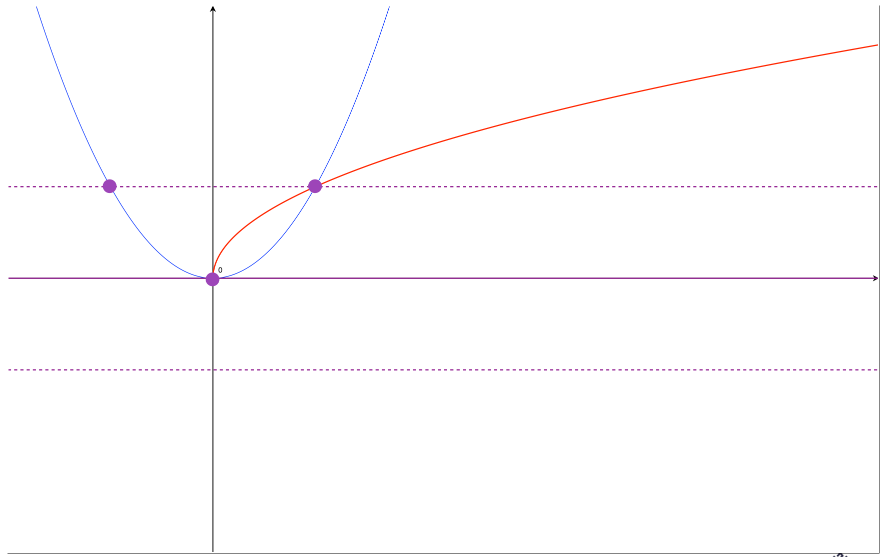
$$y = arctan(x)$$



FRAKTALES LERNEN

$$y = x^2$$

$$y = \sqrt{x}$$



Wir können Funktion strecken, stauchen und verschieben

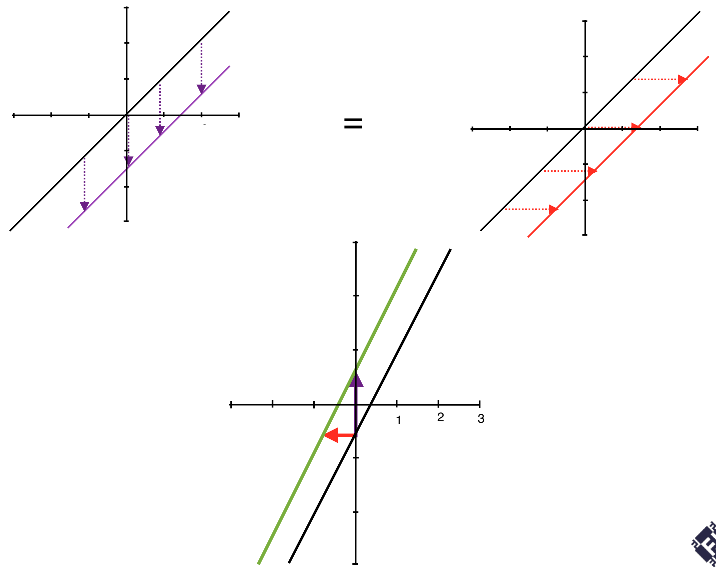
Geraden wandern in zwei Richtungen gleichzeitig

Geraden sind die einfachsten aller Funktionen. Und genau deshalb können sie etwas, was keine andere Funktion kann: sie wandern immer in beide Richtungen gleichzeitig: horizontal <u>und</u> vertikal.

Manche Geraden wandern in beide Richtungen gleich weit, andere nicht. Kannst du herausfinden, warum das so ist?

So könntest du vorgehen:

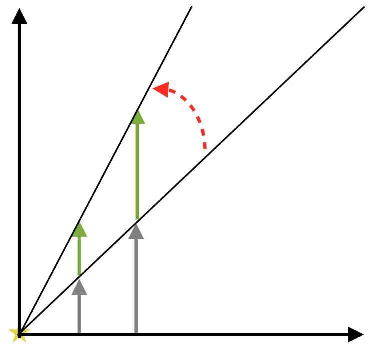
Zeichne Geraden <u>*verschiedener Steigung*</u> und verschiebe sie (mit dem Lineal) nach oben oder unten.
Kannst du eine Regel aufstellen, die den Zusammenhang zwischen horizontaler und vertikaler Verschiebung beschreibt? Formuliere dann mit Worten.
Wohin wandert die „Nullstelle" (und alle anderen y-Werte), wenn die Gerade nach unten wandert?



FRAKTALES LERNEN

Werden Geraden gequetscht, sieht es aus als würden sie sich drehen

$$y = 2 * x$$



FRAKTALES LERNEN

Links oder rechts – rauf oder runter

Du fragst dich vielleicht, warum die „–2“ in der Klammer gegen jede Intuition zu einer Rechtsverschiebung führt. Es gibt zwei mögliche Erklärungen:

- Wenn wir +2 einsetzen, wird die Klammer „0“. WIr setzen also gerade „0“ in die Funktion ein und nicht „2“.
- Vorhin hast du gesehen, dass eine Gerade gleichzeitig vertikal und horizontal wandert. Verschieden wir sie nach oben, wandert sie nach links. Verschieben wir sie nach unten, wander sie nach rechts. Die umschließende Funktion übernimmt die y-Werte der Geraden $y = x - 2$ und damit deren Seitwärtsverschiebung.[8]

$$y = (x-2)^2 \quad +1$$

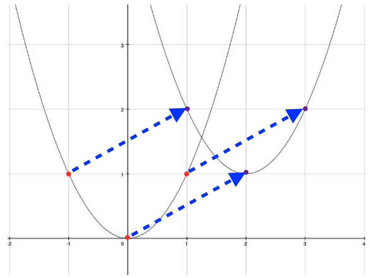
$$y = \sqrt{x-2} \quad +1$$

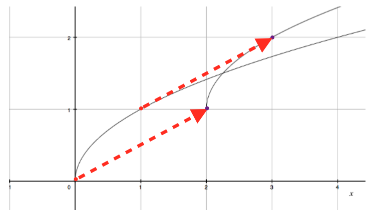
$$y = e^{x-2} \quad +1$$

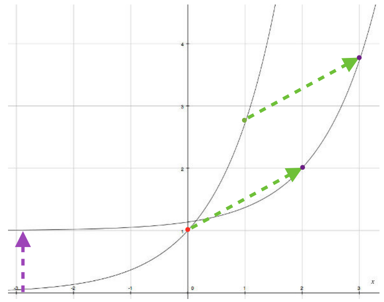
—> 2 nach rechts und

—> 1 nach oben

[8] Vielleicht siehst du dir nochmal die beiden gleichzeitigen Verschiebungen der Geraden an.







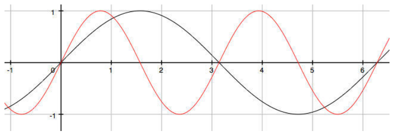
Wie passt der lila Pfeil in das Konzept?

Rauf und runter – auseinander und zusammen

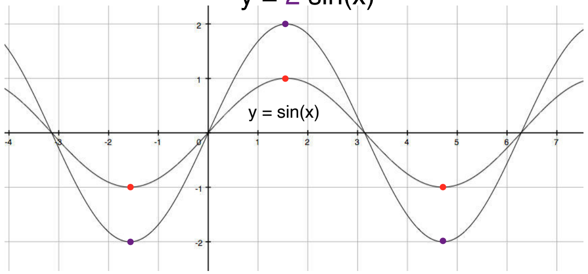
$$y = \quad sin(2x)$$

$$y = 2 * sin(x)$$

y = sin(x)   y = sin(2x)



y = 2 sin(x)

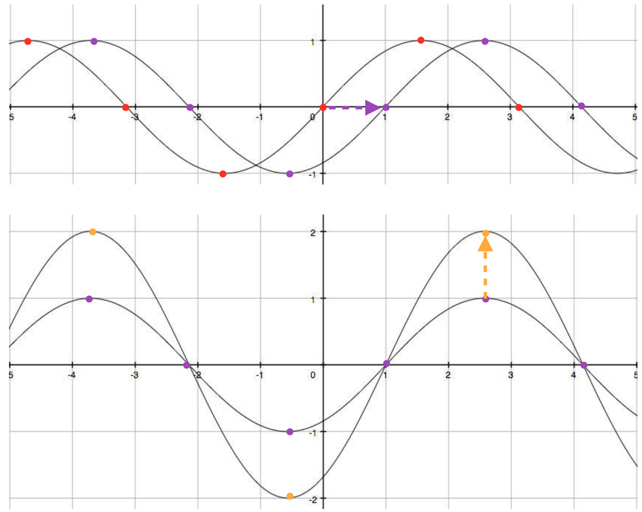


Verschieben <u>und</u> Verformen gleichzeitig.

$$y = 2 * sin(x - 1)$$

Schritt 1

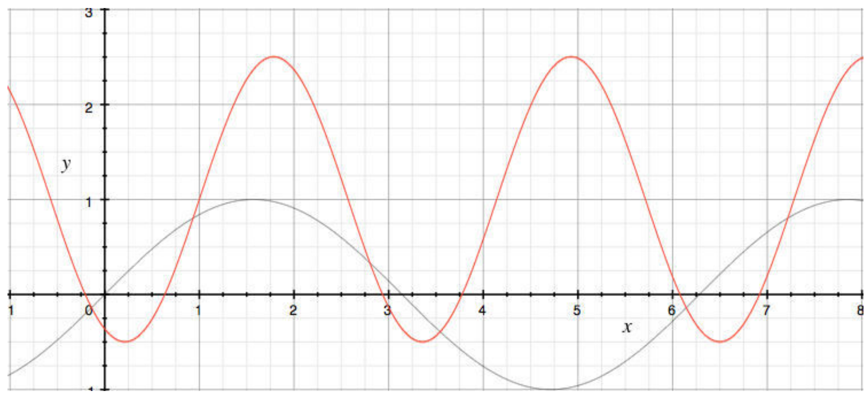
Schritt 2



FRAKTALES LERNEN

Suchst du eine Herausforderung? Dann finde heraus, wie die Sinuskurve (grau) verändert werden muss, damit aus ihr die rote Kurve wird. Folgende Fragen können dir bei der Suche helfen:

- Was passiert mit dem „Ursprung“ (0/0)? (= wohin wurde er horizontal und vertikal verschoben?)
- Was ist die neue „Spannweite“ der Welle? (= mit welchem Faktor wurde sie horizontal gestreckt?)
- Wie stark schwingt sie nach oben und unten? (= mit welchem Faktor wurde sie vertikal gestreckt?)



FRAKTALES LERNEN

Hier die Lösung:

Der Abstand zwischen Berg und Tal wurde um die Hälfte größer (*1,5) (= grüner Pfeil)

Wäre die Schwingung ein Ton, wäre dieser jetzt lauter.

Der Abstand zwischen zwei Bergspitzen ist halb so lang (= blauer Doppelpfeil).

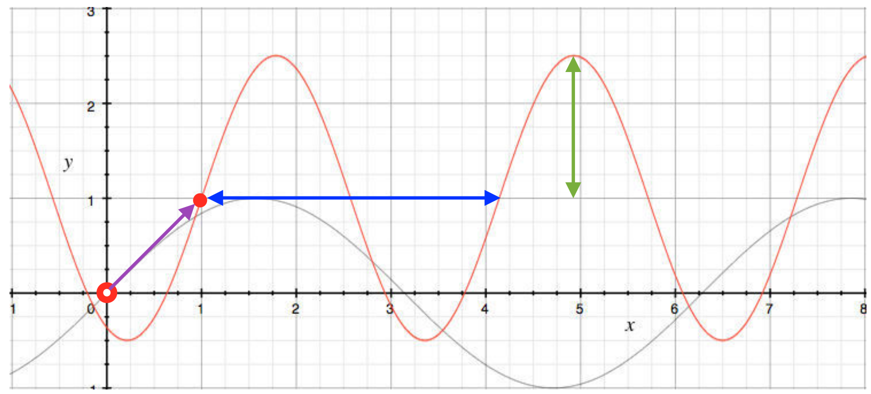
Ein Ton würde jetzt 1 Oktave höher klingen.

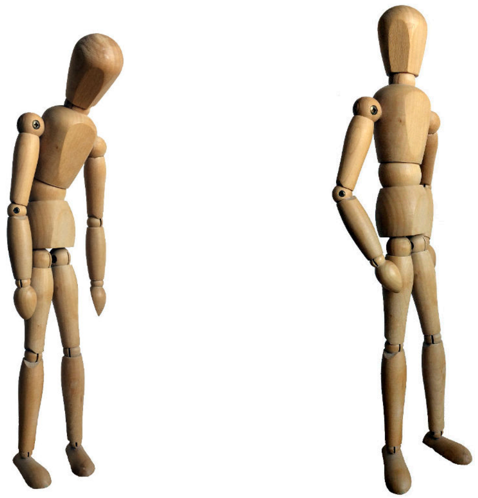
Der Ursprung wurde um 1 nach rechts und 1 nach oben verschoben. (= lila Pfeil).

Der Startpunkt einer Welle ist später.

Was eine Verschiebung einer Ton-Welle nach oben bedeutet, weiß ich nicht.

$$y = 1{,}5 * sin(2(x-1))+1$$





Skizzen machen selbstbewusst

FRAKTALES LERNEN

Skizzen kosten nur wenig Zeit und machen vieles leichter

- Mit ihrer Hilfe können wir Nullstellen aufspüren, ohne zu rechnen.
- Skizzen helfen uns, zu entscheiden, wo wir nach besonderen Eigenschaften suchen müssen.
- Wir finden den Definitionsbereich, ohne zu rechnen
- Skizzen helfen uns, Rechenfehler zu aufzuspüren, noch während sie wie machen.
- Mit einem Wort: Skizzen machen aus Sklaven Herrscher.

Rechenregeln

„0“

- „0“ **mal** „etwas“[9] = „0“.
- „Etwas“ **durch** „0“ = „unendlich“.[10]

„1“

- Wird ein bliebiger Wert mit „1“ multipliziert, = bleibt er derselbe.
- Wird ein beliebiger Wert durch „1“ geteilt, = bleibt er derselbe
- Jeder beliebige Wert geteilt durch sich selbst = 1 $(\frac{3}{3} = 1)$

---

[9] „Etwas“ meint hier „egal was“, jeder beliebige Wert.

[10] Vielleicht hilft es dir, wenn du anders formulierst: Wie oft passt ein Achtel in 1? Acht mal.
Wie oft passt etwas unendlich Kleines (="0") in „1“? Unendlich oft.

Gerade durch Gerade: doppelt krumm

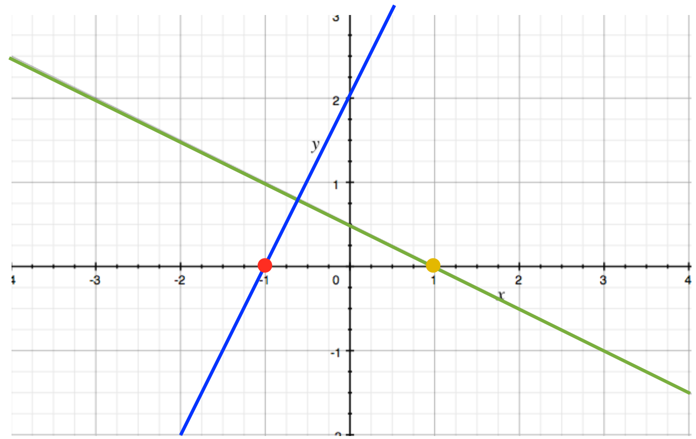
Eine Gerade besteht aus unendlich vielen Punkten. Jeder von ihnen ist ein Ergebnis. So komisch es auch klingen mag: wenn wir zwei Geraden durcheinander teilen, müssen wir nur ganze wenige Punkte berücksichtigen:

$$y = \frac{0{,}5 - 0{,}5x}{2 + 2x}$$

Gerade 1
geteilt durch
Gerade 2

Schritt 1: die Komponenten zeichnen:

Die zwei wichtigsten Punkte sind mal „0" und geteilt durch „0" .



FRAKTALES LERNEN

Schritt 2: Nullstellen und Vorzeichenbereiche markieren

- Zeichne senkrechte Striche durch die Nullstellen. Sie teilen die Kooerdinatenebene in „Vorzeichen-Bereiche“. Denn in den Nullstellen wechseln Funktionen meistens das Vorzeichen. Jetzt können wir auch das Vorzeichen des Bruchs bestimmen:

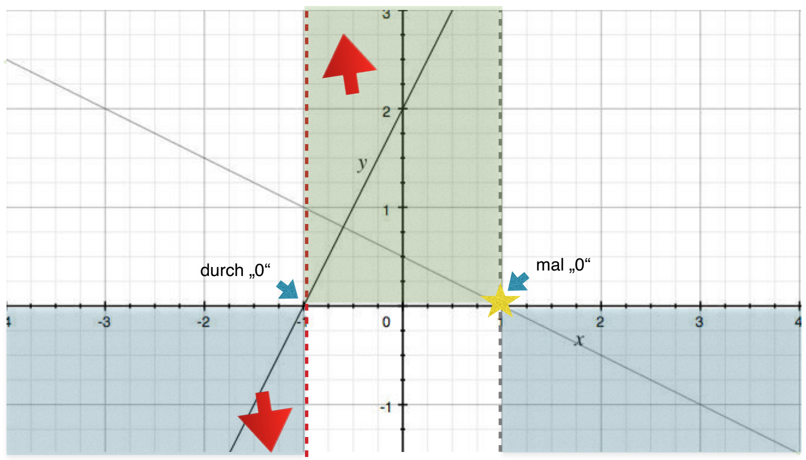
$$\frac{(+)}{(-)} = - \qquad \frac{(+)}{(+)} = + \qquad \frac{(-)}{(+)} = -$$

- Die **Nullstelle des Zählers** wird zur Nullstelle des ganzen Bruches

$$(0 * etwas = 0)$$

- An der **Nullstelle des Nenners** wird die Funktion unendlich, denn wenn wir etwas in unendlich <u>kleine</u> Teile teilen, erhalten wir unendlich <u>viele</u> davon

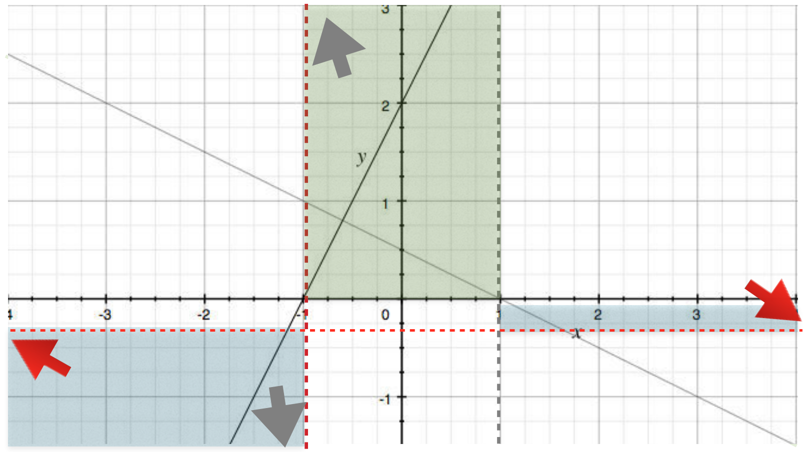
$$\left(\frac{etwas}{0} = unendlich \right)$$



Wohin strebt die Ergebnis-Funktion für große Eingabe-Werte?

Je größer x, desto weniger wirken sich feste Werte auf das Gesamtergebnis aus. Um herauszufinden, wohin die Funktion für sehr große Werte läuft, können wir diese einfach ignorieren. Und dann können wir sogar noch kürzen, wo dies vorher unmöglich war.

$$y = \frac{\cancel{0{,}5} - 0{,}5x}{\cancel{2} + 2x} \approx \frac{-0{,}5\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \quad -0{,}25$$



Zeichnen

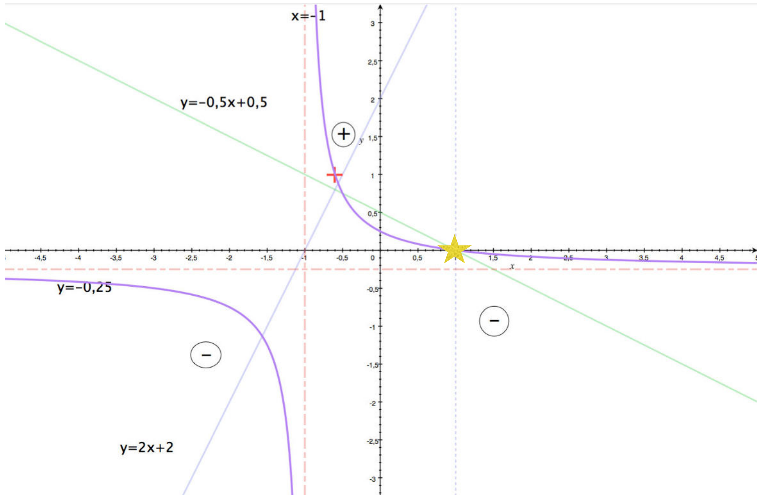
Zwei Werte kennen wir genau:

a) Die Nullstelle des Zählers wird auch zur Nullstelle der ganzen Funktion ★

b) Dort wo sich die beiden Geraden schneiden, (wo also ein Wert durch sich selbst geteilt wird), ist sie „1“.

Eigenschaften ablesen

- Definitionsbereich (Welche x sind erlaubt) — alle außer Nullstelle des Nenners: x = –1
- Wertebereich: (Welche y kann es geben): — alle, außer y = – 0,5 / 2
- Nullstellen: — x = 1
- Grenzwert für x —> ±∞: — y= – 0,5 / 2
- Vorzeichenwechsel: — Minus —> Plus —> Minus
- Stetigkeit : — stetig fallend, Sprung von -∞ nach +∞ bei x = –1
- Maxima und Minima — keine
- Wendepunkte — keine



FRAKTALES LERNEN

Keine Formel ohne Form

Was haben Formeln mit einer Form zu tun?

Zum Schluss will ich dir noch den Zusammenhang von Form und Formel vorstellen. Du kennst ihn bereits aus der Geometrie: Dort bezieht sich jede Formel auf ein Bild. Zum Beispiel sagt dir das rechtwinklige Dreieck, dass du den Pythagoras anwenden kannst und dass die Hypothenuse „c“ heißt.

Ignoriere einfach, worum was die Form für die Formeln auf den nächsten Seiten ist:

Form	$y = ax^2 + ex + f$
Aufgabe	$y = -2x^2 + 3x + 1$

$$a = -2$$
$$e = +3$$
$$f = 1$$

Formel $X_S = -\frac{e}{2a}$

Wert $X_S = -\frac{3}{2*(-2)} = \frac{3}{4}$

$a = -2$

$e = +3$

$f = 1$

Formel $Y_S = -\frac{e^2}{4a} + f$

Wert $Y_S = -\frac{3^2}{4*(-2)} + 1 = 2{,}125$

Formel $NS = X_S \pm \sqrt{{X_S}^2 - \frac{f}{a}}$

Wert $NS = \frac{3}{4} \pm \sqrt{(\frac{3}{4})^2 - \frac{1}{-2}} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16}}$

Lösung Seite 25