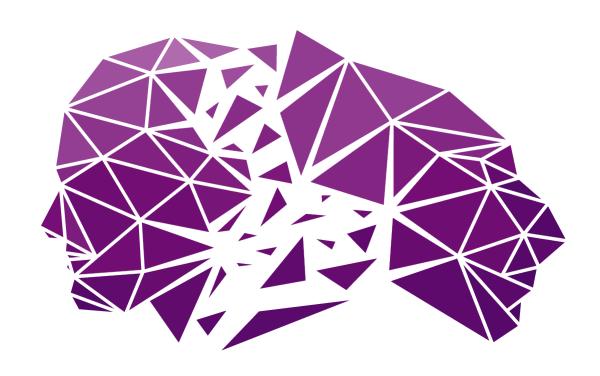
Wachsen und Beschleunigen





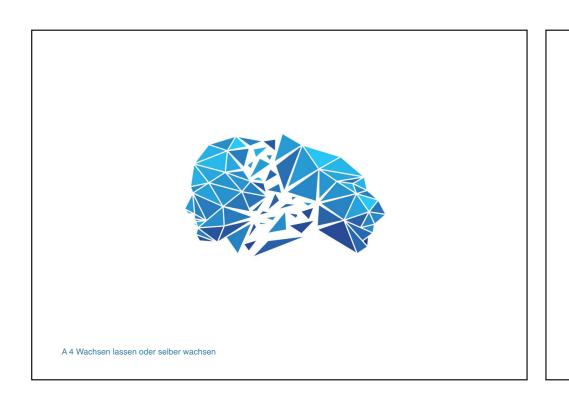
Selber wachsen, oder wachsen lassen? Beschleunigen und Bremsen 47

A 4 Wachsen lassen oder selber wachsen

FRAKTALES LERNEN

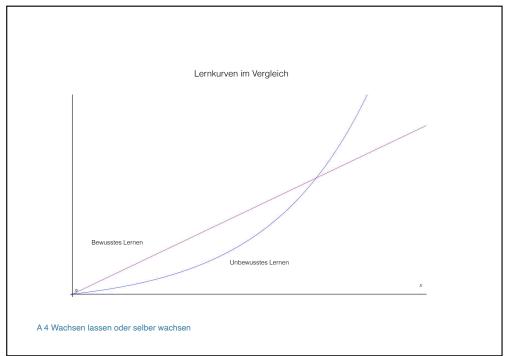
5

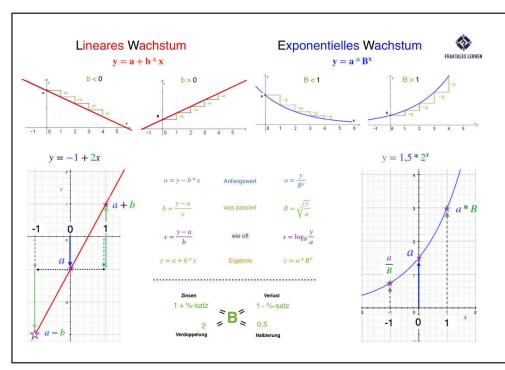
3

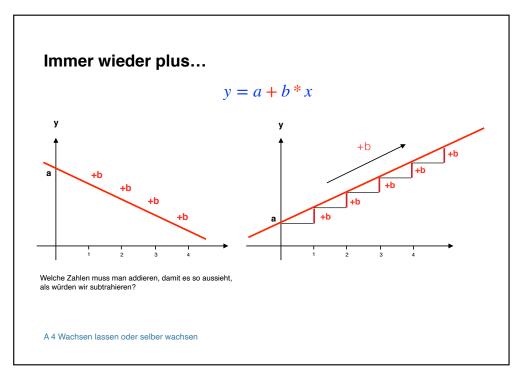


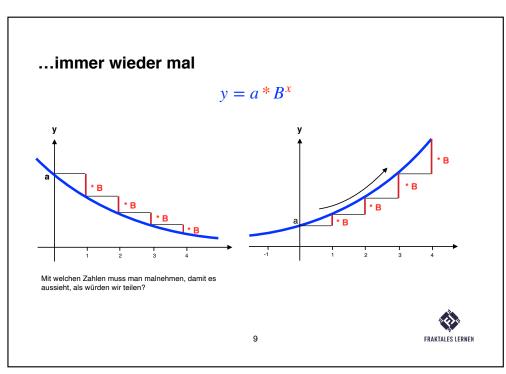
Selber wachsen, oder wachsen lassen?











"Malen nach Zahlen"

$$y = +1 + 2x$$
$$y = -1 + 2x$$

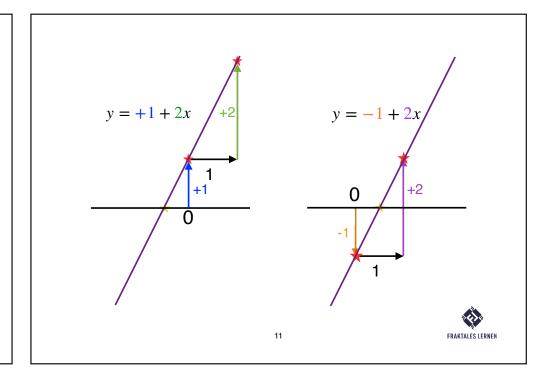
Für Gast Nr. "0" reduziert sich die Gleichung auf den blauen Teil:

Im Ursprung gehen wir in die Richtung, die das Vorzeichen angibt: Erster Punkt ★

Für Gast Nr. "1" müssten wir eigentlich rechnen. Doch es gibt eine Abkürzung: Wenn wir sofort 1 nach rechts gehen, sparen wir uns diesen Weg und berücksichtigen nur noch den grünen Teil.

a

Zweiter Punkt 🜟



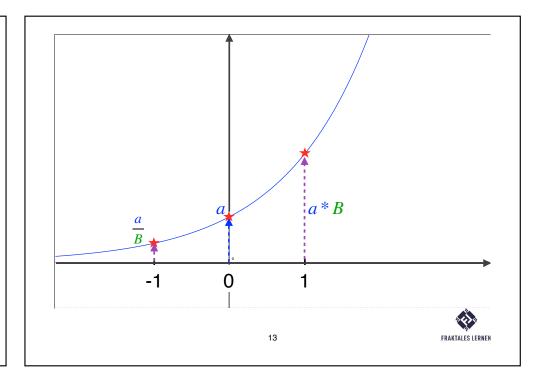
Bei exponentiellen Funktionen läuft es fast genauso:

$$y = 1,5 * 2^x$$

Im Ursprung laufen wir auch hier den blauen Teil

Für x = 1 multiplizieren wir den blauen Wert mit dem grünen Wert.

Für x = -1 teilen wir den blauen Wert durch den grünen Wert.



Was Bassiert denn so?

Bei Wachstum hängen die Zeitdauer und das was "bassiert" zusammen. Je länger ich die Stoppuhr laufen lasse, desto mehr passiert eben. In der Wissenschaft haben wir uns deshalb auf Standards geeinigt:

- Wenn Natur wächst, nehmen wir die Zeit als Einheit, in der das, was wir beobachten, sich verdoppelt hat.
- Wenn Natur zerfällt, nehmen wir die Zeit als "1", in der von dem, was wir beobachten, nur noch die Hälfte übrig ist.
- Geht es um Geld, dann lassen die Zeit konstant (1 Jahr) und konzentrieren uns auf die Veränderung in %.

Verdoppelung

Kannst du zuordnen, welches B zu welchem Prozess gehört?

Wachstum in %

Abnahme in %

Halbwärtszeit

B = 1 + %satz

$$B = 0.5$$

$$B = 2$$

$$B = 1 - \%satz$$



Wachstum: Deutsch -> Mathe¹ ²

Bei Beobachtungsbeginn sind $n_0 = 100~000$ Bakterien vorhanden und alle 45 min nimmt die Anzahl der Bakterien um den Faktor e = 2,718 zu.

Alle 30 min verdreifacht sich die Anzahl der Bakterien.

Alle 10 min. halbiert sich die Anzahl no

Wir beginnen mit der Beobachtung, wenn schon n_0 = 1000 000 000 Bakterien vorhanden sind Die Anzahl verfünffacht sich alle 45 min

Alle 15 min verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien.

$$y = a * B^{x}$$

$$y = 3^{x}$$

$$y = 2^{x}$$

$$y = 1.000.000 * 5^{x}$$

$$y = 100.000 * e^{x}$$



¹ Ordne zu!

² Welche Informationen aus den Sätzen tauchen in den Funktionsgleichungen nicht unmittelbar auf? Findest du sie trotzdem?

4 Fragen — 4 Antworten

Wer Gleichungen umstellen kann, dem beantworten eine einzige Gleichung alle Fragen:

$$y = a + bx$$
$$y = a * B^x$$

A 4 Wachsen lassen oder selber wachsen

$$a = y - b * x$$
 Anfangswert a

$$b = \frac{y - a}{x}$$
 was passiert B

$$x = \frac{y - a}{b} \qquad \text{wie oft} \qquad x = \log_B \frac{y}{a}$$

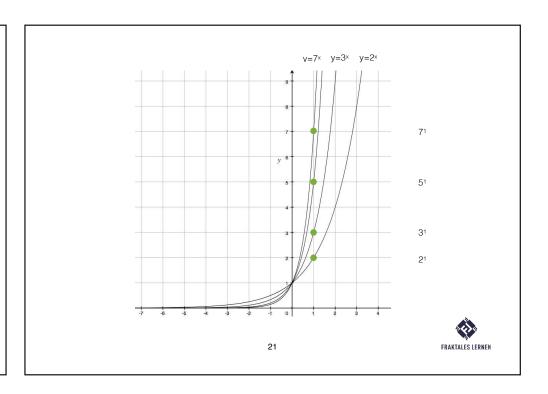
wie oft

$$y = a + b * x$$
 Ergebnis $y = a * B^x$

FRAKTALES LERNEN

Exponentielles Wachstum mit Anfangswert "1"

$$y = B^x$$

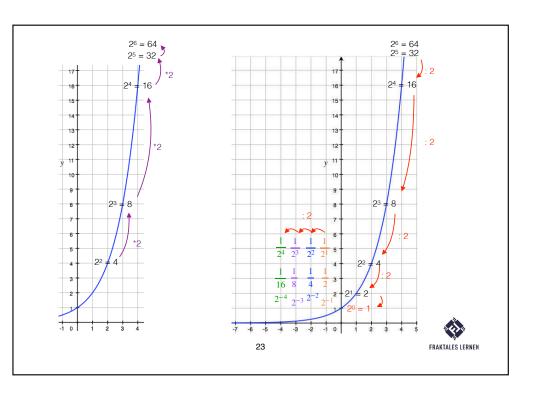


Hoch "0", hoch "-1" – was soll das heißen?

Manche Rechenanweisungen wurden für spezielle Situationen erfunden.

Später wurde der Gedanke verallgemeinert und dann zeigte sich, dass diese allgemeine Regel sogar in Situationen hilft, wo wir es gar nicht erwartet hätten.

Auch wenn du es im Moment vielleicht nicht glauben kannst, negativen Exponenten und Brüche im Exponenten werden dir später das Leben deutlich einfacher machen.



Die perfekte Zahl³

Dass die Zahl $\mathcal C$ geradezu perfekt wächst, habe ich dir schon erzählt. Doch Wachstum mit dem Faktor $\mathcal C$ ist noch viel perfekter ist, als du denkst:

$$F(e^x) = e^x = f'(e^x)$$

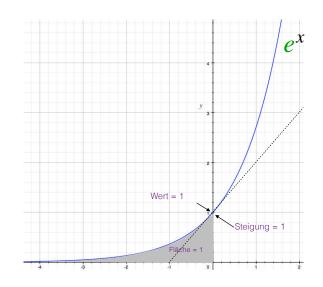
Fläche unter der Kurve bis zu einem Eingabewert x

Wert der Kurve in diesem Punkt

Steigung der Kurve in diesem Punkt.

In jedem einzelnen Punkt!

A 4 Wachsen lassen oder selber wachsen





25

³ Es sieht so aus, als habe auch die Natur nicht viel für Rechnen übrig. Aber warum interessiert sie sich für Steigungen und Flächen???

Der Logarithmus sucht den Exponenten

Manchmal kennen wir das Ergebnis und fragen uns, welcher Eingabewert es verursacht hat:

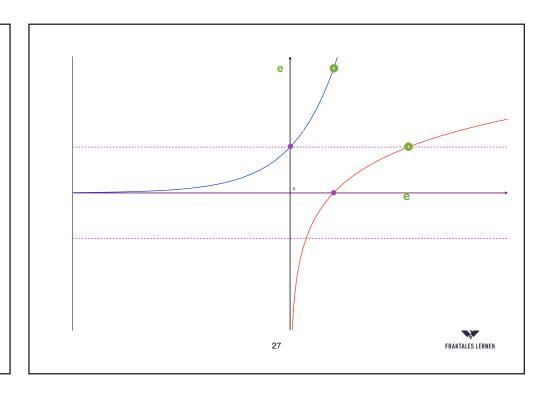
$$y = e^x$$



$$ln(y) = x$$

Wenn wir jetzt x und y vertauschen, wird die Umkehrfrage zu einer eigenen Funktion:

$$ln(x) = y$$



Aufgaben

Zeichne:

$$y = -1 + 2x$$

$$y = 2 - 3x$$

$$y = -2 - x$$

$$y = 1,5 + 0,5x$$

$$y = -1,5 - 2x$$

$$y = -2,5 - 2x$$

Wo befindet sich jeweils der Schnittpunkt zwischen den Gleichungen? 1 und 2 3 und 4 5 und 6

Anders ausgedrückt:

Wo haben beide Geraden für denselben Eingabewert dasselbe Ergebnis? oder Wo haben die beiden Gleichungen eine gemeinsame Lösung?

$$y = 2 * 2^{x}$$

$$y = 0.5 * 3^{x}$$

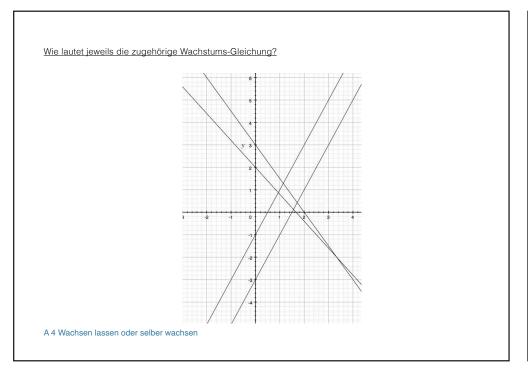
$$y = 0.5 * 0.5^{x}$$

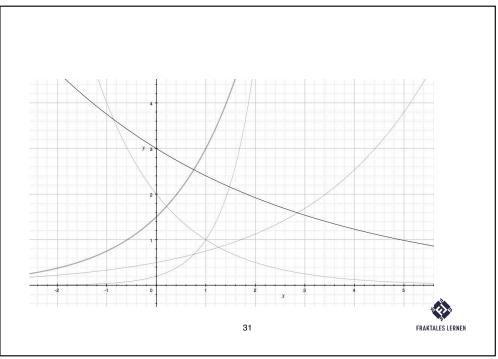
$$y = 5^{x}$$

$$y = 1.5 * 0.2^{x}$$

$$y = 1.5 * 1.5^{x}$$







Was könnte folgende Formel bedeuten?

$$K_n = K_0 * (1 + \frac{p}{100})^n$$

Vergleiche mit der Form, die du schon kennst: $y=e^x$

Was ist die Bedeutung von K_n, K_0, p, n ?

Löse nach p auf.

A 4 Wachsen lassen oder selber wachsen

Formuliere folgende beiden Formeln mit Worten

$$y = 2 * 2^n$$

$$y = 2^n$$

Was verbindet / unterscheidet die beiden Ergebnislinien?



Wie groß ist jeweils b/ B?

- Er bekommt 10% Zinsen pro Jahr
- Alle 3 h verdoppelt sich die Menge der Keime in der Lösung
- In den letzten 3 Jahren machte das Geschäft durchschnittlich 8% Verlust
- Alle 17 Jahre Verfünffachung der Prozessorgeschwindigkeit
- Das Gift hat eine Halbwärtszeit von 76 Jahren
- Der Brennholzbestand nimmt alle 3h um 5 kg ab
- Die Katze nimmt jeden Tag 5 g zu.

Zeichne folgende Graphen:

$$y = -2 * 2^x + 1$$

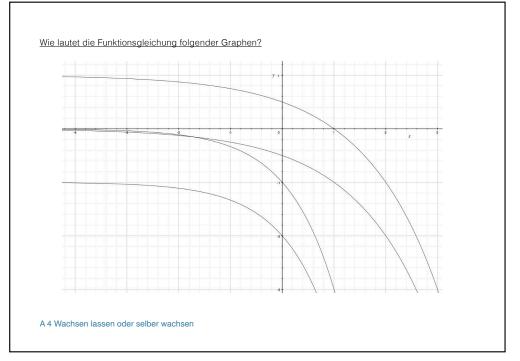
$$y = -0.5 * 3^x + 2$$

$$y = 2 * 2^x - 1$$

35

A 4 Wachsen lassen oder selber wachsen

FRAKTALES LERNEN





Lösungen

 $y = 1,5 * 2^x$

 $y = 2 * 0,5^x$

 $y = 3 * 0.8^x$

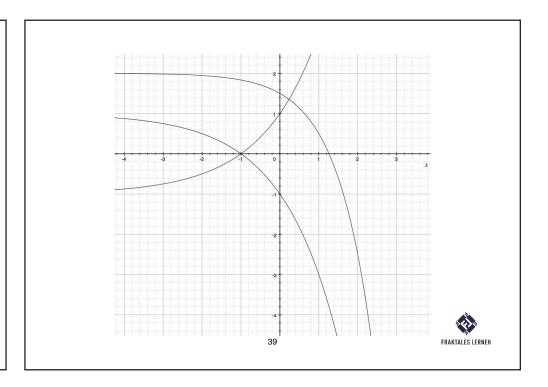
 $y = 0.2 * 5^x$

y = -1 + 2x

y = -3 + 2x

y = 2 - 1,2x

y = 3 - 1,5x

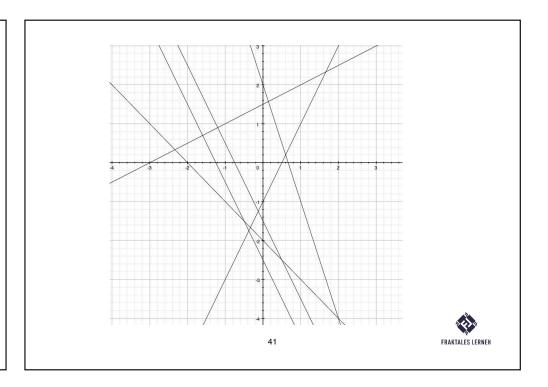


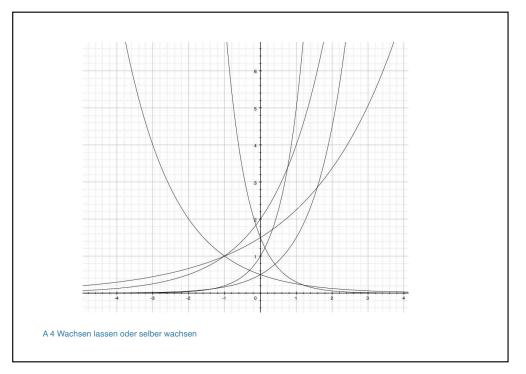
$$y = -0.5 * 2^{x}$$

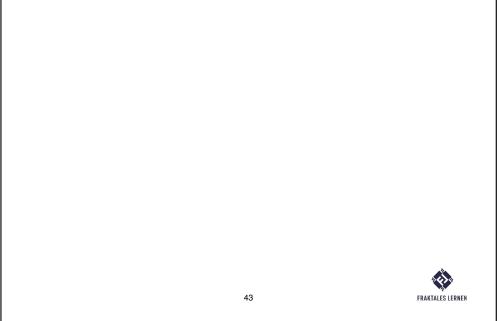
$$y = -3^{x}$$

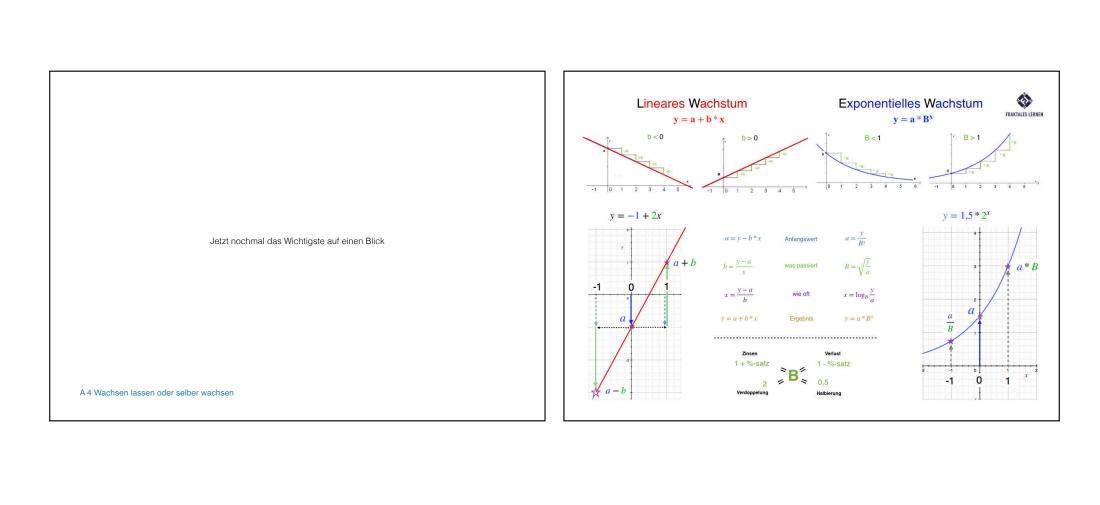
$$y = -0.5 * 2^{x} + 1$$

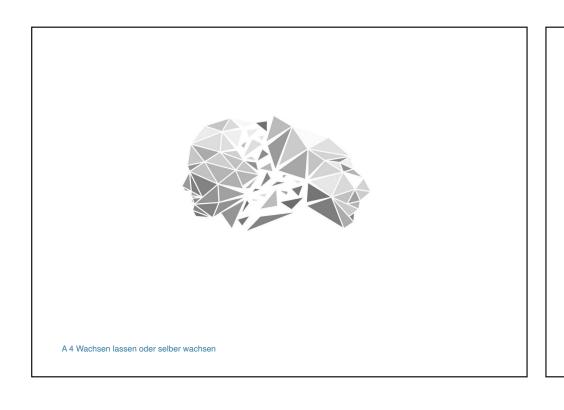
$$y = -3^{x} - 1$$













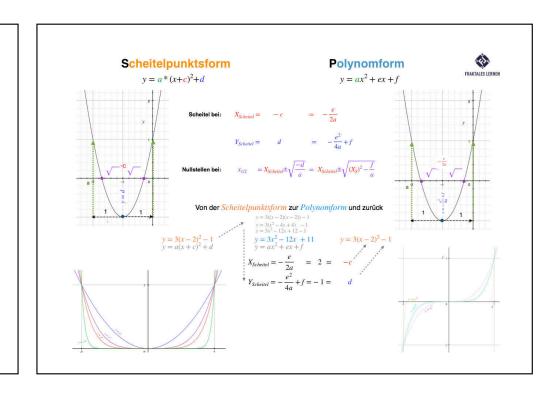
2 Kleider für denselben Träger



47

In diesem Band geht es um Polynomfunktionen 2len Grades⁴. Sie beschreiben –unter anderem– jede Art der Beschleunigung.

⁴ due erinnerst dich? Poly heißt viele und Nom steht für Namen: die Vielnamige ist die Summe mehrerer Potenzfunktionen.



Die Ur-Gerade im Quadrat -> Ur-Parabel

Die Parabel ist nicht nur die zweitwichtigste Funktion in der Schule, sondern vielleicht auch im Leben:

- Ob wir einen Ball gerade nach oben oder schief aus einem Fenster werfen, ...
- ob ein Auto beschleunigt, bremst oder in die Kurve fährt,...
- ob wir aus dem Radius eines Kreises seine Fläche berechnen wollen,

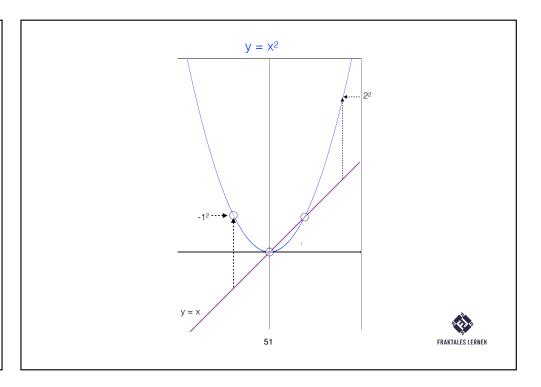
...in diesen und in tausend anderen Fällen es geht um Geraden im Quadrat.

Die Mutter aller Parabeln entsteht, indem wir die y-Werte (!)⁵ der Mutter aller Geraden mit sich selbst multiplizieren⁶:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} * \mathbf{x}$$

Die wichtigsten drei Punkte der Ur-Parabel sehen deine Augen vermutlich auch ohne rote Warnschilder.

3->9 -3->9



⁵ Achtung: bei der Ur-Geraden haben x und y denselben Wert. Um Funktionen allgemein zu verstehen, ist es sehr hilfreich, wenn du beim Quadrieren nicht auf die x-Achse siehst, sondern auf die Gerade selbst und den y-Wert quadrierst.

⁶ Alle Gäste mal rauskommen: Jeder multipliziert seine aktuelle Zimmernummer mit sich selbst und geht dorthin:

^{1 -&}gt; 1 -1 -> 1 2 -> 4 -2 -> 4

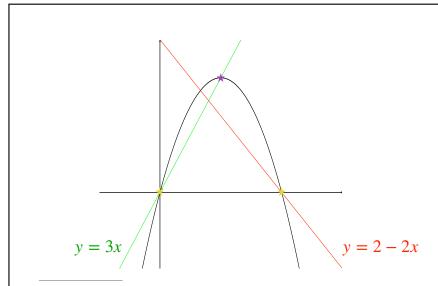
2 beliebige Geraden multipliziert —> Parabel

Auch wenn wir 2 beliebige Geraden miteinander multiplizieren, erhalten wir eine Parabel. Nur liegt jetzt der Scheitel nicht mehr zwingend im Ursprung:

$$y = (3x)(2 - 2x)$$

- Die Öffnung der Parabel ergibt sich aus der Steigung der beiden Geraden: Hier +3 mal −2 = −6 Unsere Parabel ist nach unten geöffnet (-6) und 6mal steiler als die Normalparabel.
- Die Nullstellen ★ der beiden Geraden werden zu den Nullstellen der Parabel: 0 * (egal was) = 0
- Der Scheitel ★ der Parabel liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen: Hier x = 0,5
- Kennen wir den x-Wert des Scheitels, können wir auch dessen y-Wert berechnen. y = 1,5

A 4 Wachsen lassen oder selber wachsen



⁷ Vielleicht siehst dir noch einmal an, wie man Geraden malt: Band 1: Malen nach Zahlen



53

Wir verändern die Ur-Parabel (=Scheitelpunktsform)

Wir können uns aber auch vorstellen, eine beliebige Parabel geht aus der "Normalparabel" hervor, indem wir diese...

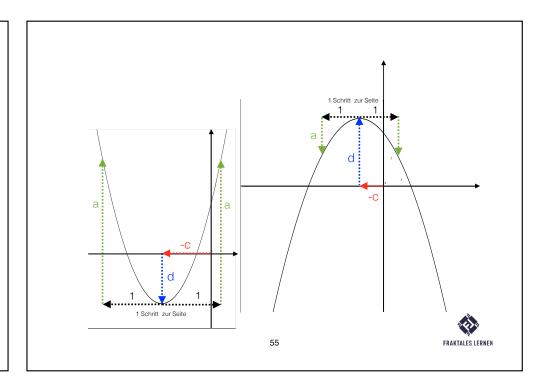
- horizontal und vertikal verschieben
- strecken und stauchen
- ggfs auch noch kippen

Manche Verschiebungen haben zur Folge, dass jetzt Parabeln auch gar keine Nullstellen haben.

Aufgabe:

Findet heraus, welche Werte a, c, d Buchstaben in der zweiten Parabel haben⁸ 9:

$$y = a * (x+c)^2 + d$$



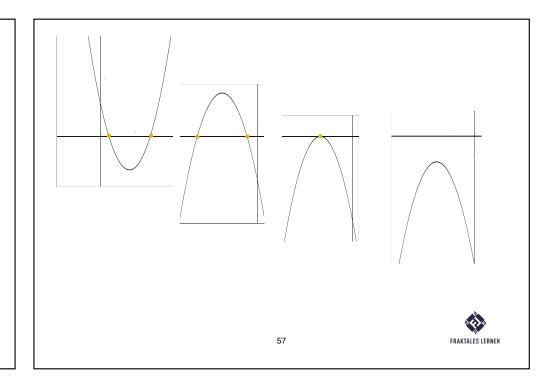
⁸ Verwende hierzu den PC zum Zeichnen von Funktionen. Das Programm Grapher ist z.B. im Betriebssystem von OSX enthalten. Oder das Programm Geogebra, das es kostenlos für alle Betriebssysteme gibt.

⁹ Jede Funktion kann man vertikal und horizontal verschieben, horizontal und vertikal strecken/stauchen. Für diese 4 Veränderungen vergeben wir wo immer möglich dieselben Parameter. Aus diesem Grund verwendet dieses Buch manchmal andere Buchstaben als euer Mathebuch. Den Buchstaben b haben wir übersprungen, da bei Parabeln a und b denselben Effekt haben. Wir brauchen also nur einen von beiden.



Sieh dir nebenstehende Parabeln an:

- Formuliere mit eigenen Worten, was eine Nullstelle ist.
- Kannst du beschreiben, wieviele Nullstellen, abhängig von Öffnung und vertikaler Verschiebung, es gibt?



Einer wollte rechnen und hat ausmultipliziert (=Polynomform)

Im Gegensatz zu allen anderen Funktionen haben die Potenzfunktionen noch eine zweite Form, die von der ersten sehr stark abweicht.

$$y = a * (x+c)^{2} + d$$

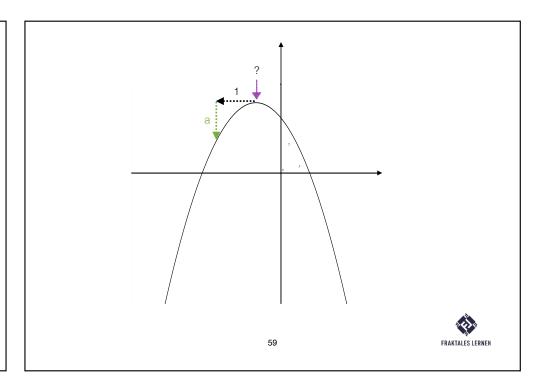
$$y = a * (x^{2} + 2cx + c^{2}) + d$$

$$y = ax^{2} + 2acx + ac^{2} + d$$

$$y = ax^{2} + ex + f$$

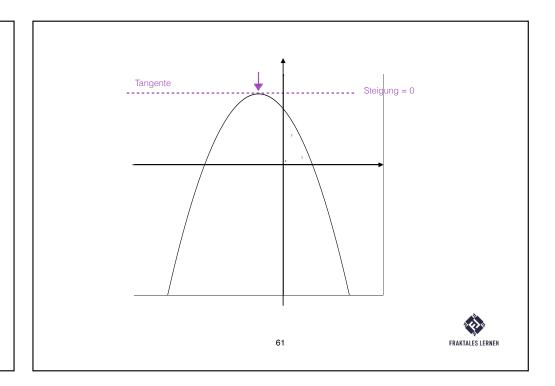
An der Bedeutung des Parameters a hat sich nichts geändert. Die anderen Parameter (e und f) tragen jetzt leider keine Bedeutung mehr, die man einfach ablesen könnte.

Und man kann die Polynomform auch nicht so einfach nach x auflösen, denn x steht in zweierlei Potenzen da. Jetzt müssen wir tricksen. Oder wir benutzen Formeln, denn zum Glück haben Mathematiker keine Lust, immer wieder denselben Umweg zu gehen.



Wohl dem, der Eigenschaften sehen kann

Im Scheitel ist die Steigung "0".



Wo ist die Steigung der Parabel "0"?

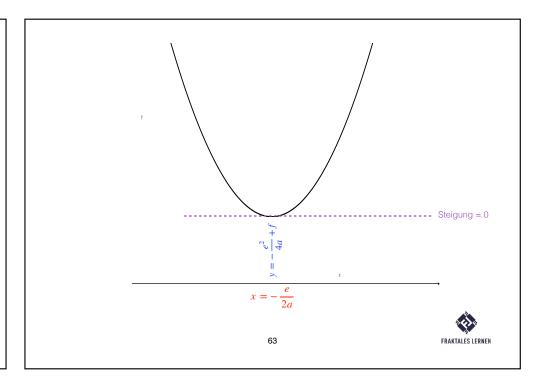
Erinnerst du dich, dass der Kosinus die Steigung des Sinus angibt? Und dass die e-Funktion ihre eigene Steigung ist? Überhaupt jede Werte-Funktion hat eine "Steigungs"-funktion, die angibt, wie steil die Kurve in jedem Punkt ist. In der Steigungsfunktion f(x)' ist y nicht mehr der Wert, sondern die *Steigung* der Kurve in diesem Ergebnispunkt. Die Steigungsfunktion von *Polynomen* aufzustellen ist so einfach, dass ich sie euch einfach zeige. Vermutlich versteht ihr, ohne jede jede Erklärung:

Wertefunktion: $y = ax^2 + ex + f$ Steigungsfunktion: y' = 2ax + e Im Scheitel ist die Steigung = 0 0 = 2ax + e

Auflösen nach x \longrightarrow $X_S = -\frac{e}{2a}$ (x-Wert des Scheitels)

Und wie immer gilt: Kennen wir x, dann können wir einsetzen und kennen auch den y-Wert des Scheitels:

$$Y_S = -\frac{e^2}{4a} + f$$



Mit Formeln auf der Scheitelsuche

Aufgabe $y = -2x^2 - 3x + 2$ $y = -3x^2 + 2x - 1,5$

$$y = -3x^2 + 2x - 1,5$$

$$y = x^2 + x - 2$$

a = -2Öffnung nach unten

Öffnung nach unten

Öffnung nach oben

e = -3

e = 1

$$X_S =$$

$$X_S =$$

$$X_S =$$

$$Y_{Scheitel} = -\frac{e^2}{4a} + f$$

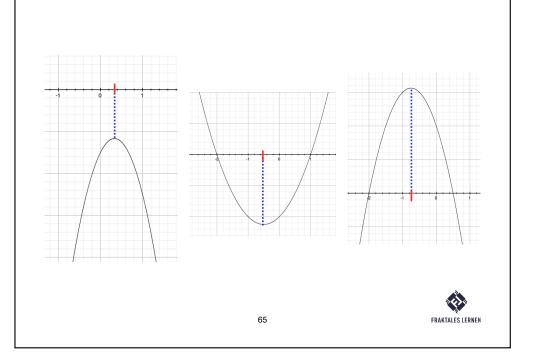
$$Y_S =$$

$$Y_S =$$

Frage: Welche Gleichung und welche Parabel gehören vermutlich zusammen?

Tip: Wenn du den y-Wert des Scheitels kennst (wenn du also weißt, ob der Scheitel oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt) und die Öffnung, dann weißt du auch, ob es Nullstellen gibt.

Kannst du die Regel mit Worten beschreiben?



Forme(I)n im Vergleich

Scheitelform: $y = a * (x+c)^2 + d$

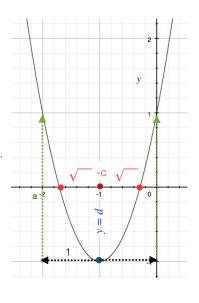
Scheitel bei: x = -cy = d

a führt uns zu den Punkten 1 links und 1 rechts des Scheitels.

Nullstellen bei: $x_{1/2} = -c \pm \sqrt{\frac{-d}{a}}$

Frage: Welches Vorzeichen müssen a und d haben, damit der Term unter der Wurzel definiert ist? (es Nullstellen geben kann?

A 4 Wachsen lassen oder selber wachsen



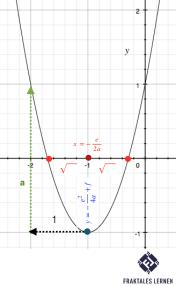
Polynomform: $y = ax^2 + ex + f$

Scheitel bei: $X_S = -\frac{e}{2a}$ (=-c)

$$Y_S = -\frac{e^2}{4a} + f \quad (=d)$$

a führt uns zu den Punkten 1 links und 1 rechts des Scheitels.

Nullstellen bei: $x_{1/2} = X_S \pm \sqrt{(X_S)^2 - \frac{f}{a}}$



67

Von der Scheitelpunktsform zur Polynomform und zurück

$$y = 3((x-2)(x-2)) - 1$$

$$y = 3(x^2 - 4x + 4) - 1$$

$$y = 3x^2 - 12x + 12 - 1$$

$$y = 3(x-2)^2 - 1$$

$$y = 3x^2 - 12x + 11$$

$$y = a(x+c)^2 + d$$

$$y = 3x^2 + ex + f$$

$$y = 3(x-2)^2 - 1$$

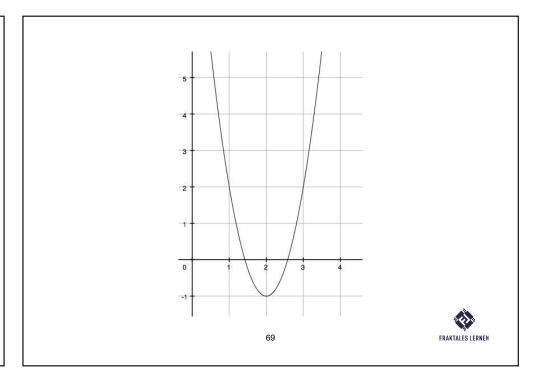
$$X_{Scheitel} = -c = 2$$
 $X_S = -\frac{e}{2a} = 2 = -c$

$$X_{Scheitel} = -c = 2$$

$$X_S = -\frac{e}{2a} = 2 = -c$$

$$Y_{Scheitel} = d = -1$$

$$Y_S = -\frac{e^2}{4a} + f = -1 = d$$



Wir suchen den Scheitel und (wenn vorhanden) die Nullstellen

Form $y = ax^2 + ex + f$ Konkrete Parabel $y = -2x^2 + 3x + 1$

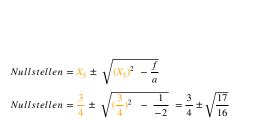


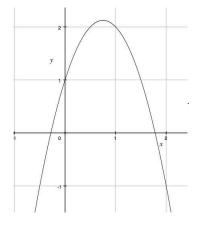
$$a = -2$$

$$e = 3$$

$$f = 1$$

$$X_{Scheitel} = -\frac{e}{2a}$$







Kannst du zuordnen?

$$y = -2(x-2)^2 - 1$$

$$y = -2(x-2)^2 - 1$$
 $y = 3(x-1)^2 - 1.5$ $y = (x-1)^2$

$$y = (x - 1)^2$$

$$a =$$

$$c =$$

d =

$$d =$$

$$d =$$

$$X_{Scheitel} = -c \quad X_S =$$

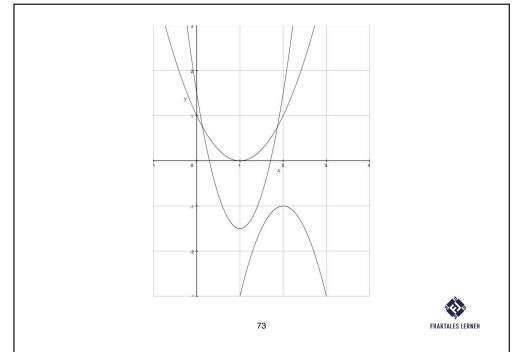
$$X_S = X_S =$$

$$X_{\varsigma} =$$

$$Y_{Scheitel} = d$$
 $Y_S = Y_S = Y_S$

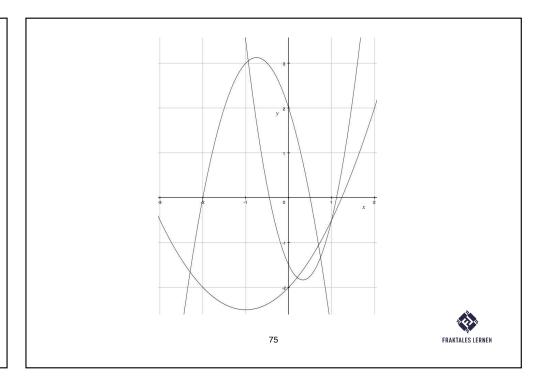
$$Y_{\rm c} =$$

$$Y_S =$$



$$X_S = -\frac{e}{2a}$$
 $X_S =$ $X_S =$ $X_S =$ $Y_S =$ $Y_S =$ $Y_S =$

$$Y_S = -\frac{e^2}{4a} + f \qquad Y_S = \qquad Y_S = \qquad Y_S =$$



Wir kennen das Ergebnis und suchen den Eingabewert

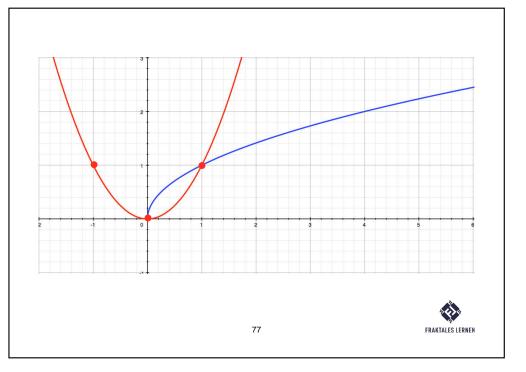
$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = x$$

Wenn wir jetzt x und y vertauschen haben erhalten wir die Formel für alle Eingabewerte zu allen Ergebnissen. Und wie du bereits weißt: "Alle Lösungen gleichzeitig" ist das, was eine Gleichung zu einer Funktion macht:

$$\pm \sqrt{x} = y$$

Wenn wir die Parabel umkehren, bleibt ihre Form zwar gleich, doch sie steht nicht mehr: "liegt". Aber lass dich nicht täuschen. Die blaue Kurve ist die Umkehrung des roten Astes, den sie schneidet. Den linken haben wir "umkehren" verloren. Denn –vielleicht erinnerst du dich– kein Gast in Hilperts Hotel kann in zwei Zimmer gleichzeitig gehen. Den Verlust gleichen wir aus, indem wir vor die Wurzel beide Vorzeichen setzen.

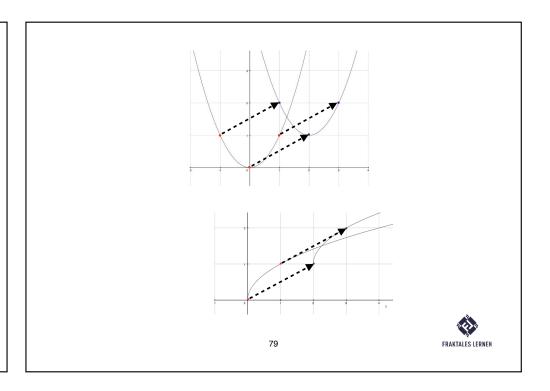


Wurzeln und Parabeln $(und\ jede\ andere\ Funktion)$ wandern auf die gleiche Weise

$$y = (x-2)^{2} + 1$$
$$y = \sqrt{x-2} + 1$$

-> 2 nach rechts und

-> 1 nach oben



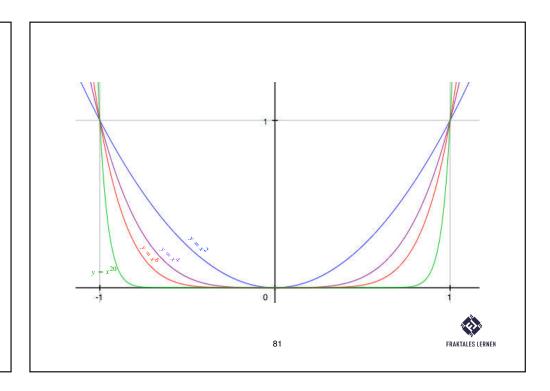
Potenzfunktionen höheren Grades im Vergleich

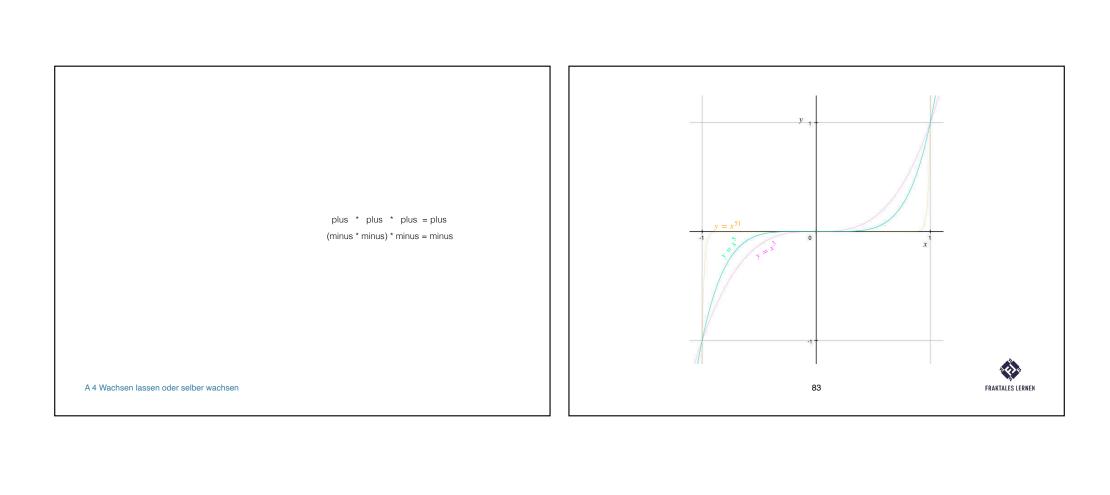
Es gehört nicht ganz zum Thema dieses Bandes. Trotzdem schadet es nichts, wenn wir am Schluss kurz über den Tellerrand sehen und einen Blick auf Pozentfunktionen höheren Grades werfen. Und wie immer gilt: stellen wir Ähnliches nebeneinander, dann erklären uns die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede mehr, als lange Texte

Die folgenden Graphen entstehen, wenn wir die y-Werte der Ur-Geraden noch öfter mit sich selbst multiplizieren.

Werden Werte kleiner als 1 mit sich selbst multipliziert, ist das Ergebnis noch kleiner.

Werden Werte größer als 1 mit sich selbst pultipliziert, ist das Ergebnis noch größer.





FRAKTALES LERNEN Scheitelpunktsform Polynomform $y = a * (x + c)^2 + d$ $y = ax^2 + ex + f$ Und zum Schluss nochmal das Wichtigste auf einen Blick: Von der $\underbrace{Scheitelpunktsform}_{y=3((x-2)(x-2))-1}$ zur $\underbrace{Polynomform}_{y=3((x-2)(x-2))-1}$ $y = 3(x^{2} - 4x + 4) - 1$ $y = 3x^{2} - 12x + 12 - 1$ $y = 3x^{2} - 12x + 11$ $y = ax^{2} + ex + f$ $y = 3(x-2)^{2} - 1$ y = a(x + c)^{2} + d $y = 3(x - 2)^2 - 1$ A 4 Wachsen lassen oder selber wachsen